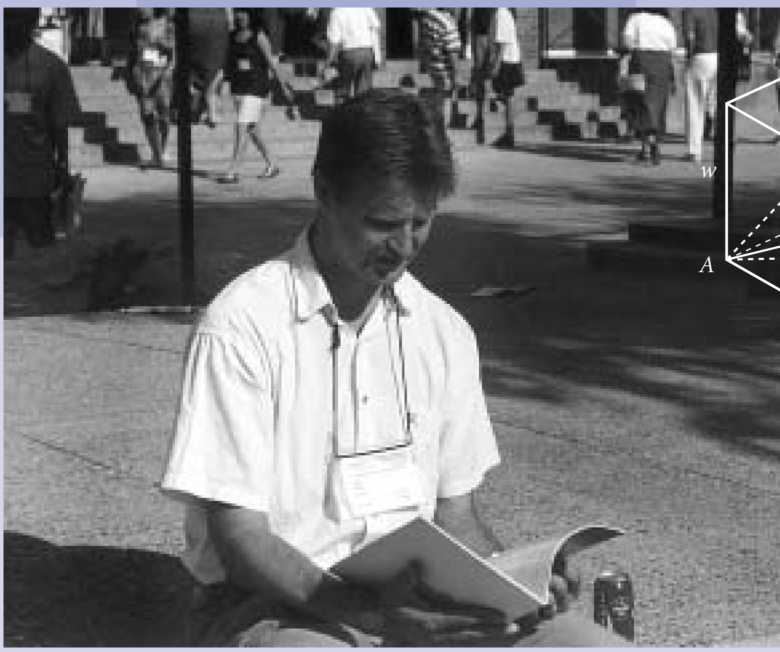
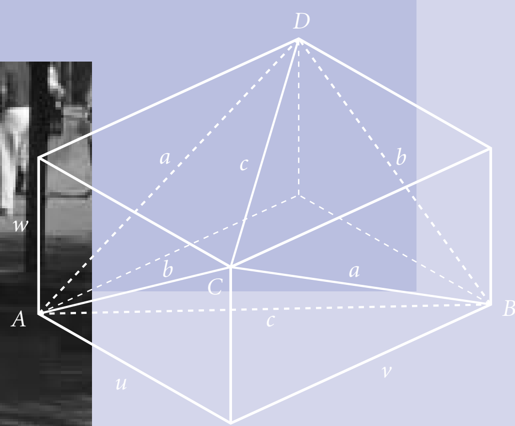
Orgaan van de
Nederlandse Vereniging
van Wiskundeleraren

EUCLIDES

Vakblad voor de wiskundeleraar

jaargang 72
1996-1997 februari
5









18°- en 3°-tabel

Envelop met inhoud

ICME-8

Euclides is het orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren. Het blad verschijnt 8 maal per verenigingsjaar.

Artikelen/mededelingen

Artikelen en mededelingen naar:
Kees Hoogland
Gen. Cronjéstraat 79 rood
2021 JC Haarlem.

Richtlijnen voor aanlevering:

- goede afdruk met illustraties/foto's/formules op juiste plaats of goed in de tekst aangegeven.
- platte tekst op diskette: WP of ASCII
- illustraties/foto's/formules op aparte vellen: genummerd, zwart/wit, scherp contrast.

Nadere richtlijnen worden op verzoek toegezonden.

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

Voorzitter
dr. J. van Lint
Spiekerbrink 25
8034 RA Zwolle
tel. 038-4539985
Secretaris
W. Kuipers
Burg. Bijleveldsingel 38
8052 AP Hattem
tel. 038-4447017
Ledenadministratie
Mw. N. van Bemmel-Hendriks
De Schalm 19
8251 LB Dronten
tel. 0321-312543

Contributie per ver. jaar: ƒ70,00
Studentleden: ƒ47,50
Leden van de VVWL: ƒ50,00
Lidmaatschap zonder Euclides: ƒ50,00
Betaling geschiedt per acceptgiro.
Nieuwe leden geven zich op bij de ledenadministratie.
Opzeggingen vóór 1 juli.

Abonnementen niet-leden

Abonnementen gelden steeds vanaf het eerstvolgende nummer.
Abonnementsprijs voor personen: ƒ80,00 per jaar. Voor instituten en scholen: ƒ240,00 per jaar.
Betaling geschiedt per acceptgiro.
Losse nummers op aanvraag leverbaar voor ƒ20,00.
Opzeggingen vóór 1 juli.

Advertenties

Informatie, prijsopgave en inzending:
C. Hoogsteder, Prins Mauritshof 4
7061 WR Terborg, tel. 0315-324337
of naar:
L. Bozuwa, Merwekade 90
3311 TH Dordecht, tel. 078-6145522.

Adresgegevens auteurs

F. Bosman
Cito
Postbus 1034
6801 MG Arnhem

L. van den Broek
Graafseweg 387
6532 ZN Nijmegen

G. van den Heuvel
Sint Jurriënstraat 40
7412 XJ Deventer

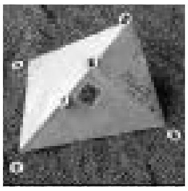
R. Jongeling
Sterappelstraat 38
4421 LG Kapelle

F. Maassen
La Pazstraat 21
2622 BM Delft

V.E. Schmidt
Verlengde Grachtstraat 43
9717 GE Groningen

J. Smit
Houtsniplaan 31
1873 JT Groet

Inhoud



193



200



207

van de redactietafel



Bij het schrijven van dit stukje is de kerstvakantie nog maar net achter de rug.
Het lijkt wel of de problematieken van de huidige programma's al weer opgevolgd worden door de problematieken van de volgende programma's, zowel voor havo/vwo als voor vbo/mavo.

Havo/vwo

Talloze scholen zijn aan het experimenteren met studiehuisprojecten, waarbij van leerlingen een toenemende zelfstandigheid gevraagd wordt bij het leren van wiskunde. Welke veranderingen in de rol van de wiskundedocent daarbij mogelijk verlangd worden, is de meest gestelde vraag. Een simpel en eenduidig antwoord is daar voorlopig niet op te geven. Laat u maar eens weten hoe die experimenten en projecten lopen op uw school. Leren van elkaar is een effectief middel om de veranderingen het hoofd te bieden.
Voorlopig hebben we nog te maken met de tussenfase. Er zijn nog niet veel reacties bij de redactie binnengekomen op de havo4B/vwo4-problematiek. In het volgende nummer is daar meer over te verwachten.
De belangrijkste resultaten uit de enquête van de hoorzitting van het APS op 12 december jongstleden zijn:

- De eerste klas is te makkelijk voor HV-leerlingen: 96% (zeer) eens.
- Leerlingen hebben in de onderbouw te weinig algebra gehad: 97% (zeer) eens.
- Het nieuwe Tweede Fase programma in 1998 moet meer rekening houden met het onderbouwprogramma: 67% (zeer) eens.

De schoolboeken zullen ongetwijfeld in de nieuwe edities van 1998 rekening houden met deze wensen.

Vbo/mavo C/D

De laatste maanden zijn aangebroken van de voorbereiding van de vbo/mavo leerlingen op de nieuwe C/D-examens. Het lastigste onderdeel om vorm te geven lijkt het verplichte computergebruik in het schoolonderzoek. Mijn inschatting is dat het nog wel enige jaren zal duren voordat alle scholen daar een goede en praktische invulling voor gevonden hebben.
In de tussentijd lijken de plannen voor de nieuwe inrichting van het vbo/mavo-programma met sectoren en leerwegen wat aan de aandacht te ontsnappen. Deze nieuwe opzet zal echter ook in 1998 in de eerste klas beginnen. Voorlopig is er dus geen rust in de tent. Te verwachten is wel dat scholen die zich goed hebben ingewerkt in het huidige nieuwe examenprogramma wiskunde niet veel nieuwe zaken zullen tegenkomen in de toekomstige programma's.
Dat scheelt alweer.

Wiskundeonderwijs elders

Er wordt in Nederland uitgebreid gediscussieerd over de inrichting van het wiskundeonderwijs. Soms kunnen gebeurtenissen in andere landen zo'n discussie weer in het juiste perspectief plaatsen. Leest u maar eens het fragment uit een brief van een docent uit Bulgarije op bladzijde 196. Ik heb enige tijd met deze zeer gedreven wiskundedocent gecorrespondeerd. De leerlingen in Bulgarije zullen inmiddels zonder hem verder moeten.

Verder in dit nummer

Aanbevolen wordt het artikel van Leon van den Broek en Jan Smit. Dit is een eerste artikel in een serie van drie over de altijd maar weer intrigerende meetkunde.
Ook de Wiskunde-Olympiade en Kangoeroe zullen binnenkort weer plaatsvinden. Leuke wedstrijden, waar een toenemend aantal leerlingen aan meedoet. Breng het onder de aandacht van uw leerlingen!

Kees Hoogland

De 18°-tabel en de 3°-tabel

Frits Maassen

Inleiding

In veel tabellenboeken worden 45 pagina's besteed aan *benaderingen* voor de waarden van sinus, cosinus en tangens voor hoeken in graden.
Het aantal pagina's dat in die boeken gewijd wordt aan *exacte waarden* behorende bij hoeken van 0° tot en met 360° is doorgaans gelijk aan 1.
De hoeken zijn in dat geval veelvouden van 15°, zoals in tabel 1 is weergegeven.

α	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\tan\alpha$
0°	0	1	0
15°	$\frac{1}{4}(\sqrt{6}-\sqrt{2})$	$\frac{1}{4}(\sqrt{6}+\sqrt{2})$	$2-\sqrt{3}$
30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$
45°	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	1
60°	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
75°	$\frac{1}{4}(\sqrt{6}+\sqrt{2})$	$\frac{1}{4}(\sqrt{6}-\sqrt{2})$	$2+\sqrt{3}$
90°	1	0	-

tabel 1

Andere hoeken

Als docent wiskunde krijg je bij de behandeling van tabel 2 met de exacte waarden voor sinus, cosinus en tangens soms de vraag of er nog meer hoeken zijn waarvan de exacte waarden te berekenen zijn.

De gedachte achter deze vraag is niet bij iedereen dezelfde:

α	0°	30°	45°	60°	90°
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1
$\cos\alpha$	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan\alpha$	0	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	-

tabel 2

de ene leerling vraagt het uit nieuwsgierigheid, de ander in de hoop dat er toch niet nog meer zullen zijn.
Als antwoord geven we meestal dat met behulp van formules (die vroeger tot de vwo-lesstof behoorden) ook wel andere waarden te berekenen zijn.
Nog redelijk mooi zoals sin 15°, zijn te berekenen met waarden behorende bij 45° en 30°:

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta-\cos\alpha\cdot\sin\beta$$

$$\sin 15° = \sin 45°\cdot\cos 30° - \cos 45°\cdot\sin 30° =$$

$$\tfrac{1}{4}(\sqrt{6}-\sqrt{2})$$

En iets minder mooi zoals die van $22\frac{1}{2}$°, zijn te berekenen met die van 45°:

voor $\sin\alpha > 0$ geldt $\sin\alpha = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{2-2\cdot\cos 2\alpha}$

$$\sin 22\tfrac{1}{2}° = \tfrac{1}{2}\cdot\sqrt{2-2\cdot\tfrac{1}{2}\sqrt{2}} = \tfrac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}$$

Meestal is er onvoldoende tijd om uitvoerig op zulke vragen in te gaan.

Tot kort geleden heb ik er niet bij stil gestaan of er ook andere hoeken zijn met bijbehorende exacte waarden voor bijvoorbeeld de sinus.

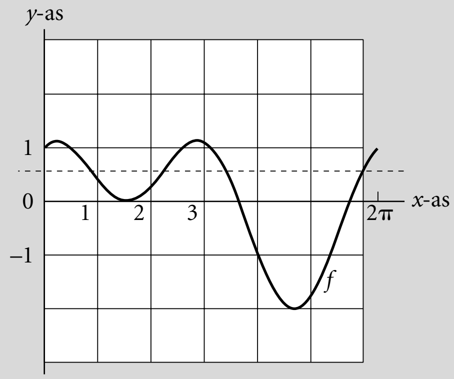
Een opgave uit een proefwerk goniometrie in 5 vwo
Wiskunde B:

Hiernaast zie je de grafiek van
$f: x \rightarrow \cos 2x + \sin x$ met $0 \leq x \leq 2\pi$

a Los op $f(x) = 0$

b Los op $f(x) = \frac{1}{2}$

c Bereken de vergelijking van de raaklijn aan de grafiek van f in $(\pi, 1)$.



Bij vraag b zou ik vroeger niet de exacte antwoorden $\frac{3\pi}{10}$, $\frac{7\pi}{10}$, $\frac{11\pi}{10}$ en $\frac{19\pi}{10}$ geweten hebben.

Overigens wil ik de benaderingen in 2 decimalen 0,94; 2,20; 3,46 en 5,97 bij leerlingen uiteraard nog steeds goed rekenen.
Bij het samenstellen van een inhaalproefwerk ruimtemeetkunde voor 5 vwo wilde ik een afstand laten berekenen in een regelmatig vijfzijdig prisma.
Tot mijn verrassing vond ik:

$\sin 18° = \frac{1}{4}(\sqrt{5} - 1)$

Een bewijs dat past bij de wiskunde B-stof in 5 vwo. Met behulp van dit resultaat is een tabel af te leiden voor hoeken die veelvouden zijn van 18 graden. (*tabel 3*)

Detail is dat ook 'het gaatje' tussen $\frac{\pi}{6}$ en $\frac{\pi}{4}$ hiermee gevuld is. (*tabel 4*)

BEWIJS

ABCDE is een regelmatige vijfhoek met zijde 1

$PC = \cos 36°$; $QC = \sin 18°$; $PQ = \frac{1}{2}$

$PC - QC - PQ = 0$

$\cos 36° - \sin 18° - \frac{1}{2} = 0$

$1 - 2\sin^2 18° - \sin 18° - \frac{1}{2} = 0$

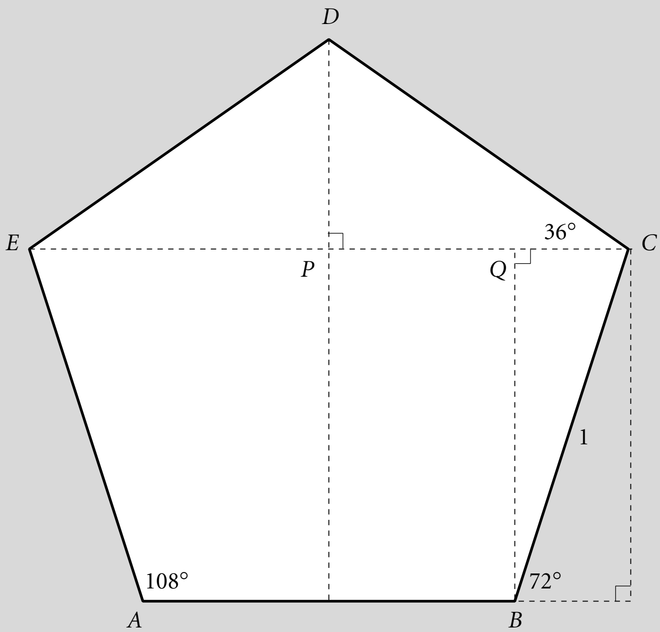
$4\sin^2 18° + 2\sin 18° - 1 = 0$

stel: $\sin 18° = x$

$4x^2 + 2x - 1 = 0 \rightarrow$

$x = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4} \vee x = \frac{-1 - \sqrt{5}}{4}$ (VN)

dus $\sin 18° = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4}$



de 18° tabel

α	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\tan\alpha$
18°	$\frac{1}{4}(\sqrt{5}-1) = \frac{1}{4}\cdot\sqrt{6-2\cdot\sqrt{5}}$	$\frac{1}{4}\cdot\sqrt{10+2\cdot\sqrt{5}}$	$\frac{1}{5}\cdot\sqrt{25-10\cdot\sqrt{5}}$
36°	$\frac{1}{4}\cdot\sqrt{10-2\cdot\sqrt{5}}$	$\frac{1}{4}(\sqrt{5}+1)$	$\sqrt{5-2\cdot\sqrt{5}}$
54°	$\frac{1}{4}(\sqrt{5}+1) = \frac{1}{4}\cdot\sqrt{6+2\cdot\sqrt{5}}$	$\frac{1}{4}\cdot\sqrt{10-2\cdot\sqrt{5}}$	$\frac{1}{5}\cdot\sqrt{25+10\cdot\sqrt{5}}$
72°	$\frac{1}{4}\cdot\sqrt{10+2\cdot\sqrt{5}}$	$\frac{1}{4}(\sqrt{5}-1)$	$\sqrt{5+2\cdot\sqrt{5}}$

In verband met de 'uniformiteit' van de waarden in de tabel is af en toe gebruik gemaakt van de eigenschap:
$\sqrt{p}+\sqrt{q}=\sqrt{a+\sqrt{b}}$ met $p+q=a$ en $4pq=b$ $(a, b, p, q > 0)$

tabel 3

α	0		$\frac{1}{10}\pi$		$\frac{1}{6}\pi$	$\frac{1}{5}\pi$	$\frac{1}{4}\pi$	$\frac{1}{3}\pi$	$\frac{1}{2}\pi$
$\sin\alpha$	0		$\frac{1}{4}(\sqrt{5}-1)$		$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}\cdot\sqrt{10-2\cdot\sqrt{5}}$	$\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\cdot\sqrt{3}$	1

tabel 4

absoluut verschil	18	36	54	72
15	3	21	39	57
30	12	6	24	42
45	*27*	*9*	9	27
60	*42*	*24*	*6*	*12*
75	*57*	*39*	*21*	*3*

schema 1

som	18	36	54	72
15	33	51	69	87
30	48	66	84	-
45	63	81	-	-
60	78	-	-	-
75	-	-	-	-

schema 2

Een wortelvergelijking

Los de volgende vergelijking op:

$$\sqrt{x} + \sqrt{x-a} = 2 \qquad (1)$$

Oplossing:

Uit $(\sqrt{x} - \sqrt{x-a}) \times (\sqrt{x} + \sqrt{x-a}) = (\sqrt{x})^2 - (\sqrt{x-a})^2 = a$

volgt

$$\sqrt{x} - \sqrt{x-a} = \frac{a}{\sqrt{x} + \sqrt{x-a}}$$

en dus

$$\sqrt{x} - \sqrt{x-a} = \frac{a}{2} \qquad (2)$$

Tellen we de vergelijkingen (1) en (2) op dan krijgen we

$2\sqrt{x} = 2 + \frac{a}{2}$, en dus

$$x = \left(1 + \frac{a}{4}\right)^2.$$

We gaan gemakkelijk na dat

$x - a = \left(1 - \frac{a}{4}\right)^2 > 0$, zodat

de oplossing geen negatief getal onder het wortelteken geeft.

Voor $a = 8$ echter geeft deze oplossing $x = 9$, ingevuld in de vergelijking komt er nu $4 = 2$.

literatuur

The college mathematics journal, vol. 27 no 1

Tabel 4 laat zien dat 'de regel' $\frac{1}{2}\sqrt{0}$, $\frac{1}{2}\sqrt{1}$, $\frac{1}{2}\sqrt{2}$, $\frac{1}{2}\sqrt{3}$ en $\frac{1}{2}\sqrt{4}$, die soms bij tabel 2 (sin α) wordt gebruikt, niets meer is dan een ezelsbruggetje.

De 3°-tabel

Met formules en gegevens uit eerder genoemde tabellen is tabel 5 (zie blz. 191 en 192) op te stellen voor exacte waarden behorende bij hoeken die veelvouden zijn van 3 graden.
In de schema's op blz. 189 is aangegeven welke combinaties van hoeken daarbij gebruikt zijn.
Dit leidt uiteindelijk tot tabel 5.

Hierover een paar opmerkingen:
- hoewel bij de waarden voor de hoeken van 6, 9, 12, 24, 27, 42, 48, 63, 66, 78, 81 en 84 graden sinus-waarden van de mooie hoeken 30, 45 en 60 graden gebruikt worden, zien de uitkomsten er toch al redelijk lastig uit;
- de waarden voor de hoeken van 3, 21, 33, 39, 51, 57, 69 en 87 graden zijn het meest ingewikkeld;
- er zijn telkens twee waarden die slechts op het middelste teken (+/−) van elkaar verschillen (bijvoorbeeld: $33 = 18 + 15$ en $3 = 18 - 15$).

Ten slotte

Het nut hiervan is niet zozeer het gebruik van de uitkomsten in de tabellen maar meer het vinden ervan: gebruik van formules en herleiden. Een foutje is zo gemaakt, zowel bij het herleiden als bij het – ter controle – intikken in de rekenmachine.
Ook is het aardig om te laten zien dat er meer hoeken zijn dan de bekende 30-45-60 graden waarvan sinus, en dus ook cosinus en tangens exact te berekenen zijn met de 'middelbare-school-wiskunde'.
Misschien nuttig als extra stof voor de betere leerling; echter niet bovenop het toch al pittige Wiskunde B-programma.

de 3° tabel

α	$\sin\alpha = \cos(90^\circ - \alpha)$
3°	$\frac{1}{8}\left(\sqrt{12 + 6\cdot\sqrt{3} - 4\cdot\sqrt{5} - 2\cdot\sqrt{15}} - \sqrt{20 - 10\cdot\sqrt{3} + 4\cdot\sqrt{5} - 2\cdot\sqrt{15}}\right)$
6°	$\frac{1}{8}\left(\sqrt{30 - 6\cdot\sqrt{5}} - \sqrt{6 + 2\cdot\sqrt{5}}\right)$
9°	$\frac{1}{8}\left(\sqrt{12 + 4\cdot\sqrt{5}} - \sqrt{20 - 4\cdot\sqrt{5}}\right) = \frac{1}{4}\left(\sqrt{3 + \sqrt{5}} - \sqrt{5 - \sqrt{5}}\right)$
12°	$\frac{1}{8}\left(\sqrt{10 + 2\cdot\sqrt{5}} - \sqrt{18 - 6\cdot\sqrt{5}}\right)$
15°	$\frac{1}{4}\left(\sqrt{6} - \sqrt{2}\right)$
18°	$\frac{1}{8}\left(\sqrt{24 - 8\cdot\sqrt{5}}\right) = \frac{1}{4}\left(\sqrt{5} - 1\right)$
21°	$\frac{1}{8}\left(\sqrt{21 + 10\cdot\sqrt{3} - 4\cdot\sqrt{5} - 2\cdot\sqrt{15}} - \sqrt{20 - 6\cdot\sqrt{3} + 4\cdot\sqrt{5} - 2\cdot\sqrt{15}}\right)$
24°	$\frac{1}{8}\left(\sqrt{18 + 6\cdot\sqrt{5}} - \sqrt{10 - 2\cdot\sqrt{5}}\right)$
27°	$\frac{1}{8}\left(\sqrt{20 + 4\cdot\sqrt{5}} - \sqrt{12 - 4\cdot\sqrt{5}}\right) = \frac{1}{4}\left(\sqrt{5 + \sqrt{5}} - \sqrt{3 - \sqrt{5}}\right)$
30°	$\frac{1}{2}$
33°	$\frac{1}{8}\left(\sqrt{12 + 6\cdot\sqrt{3} - 4\cdot\sqrt{5} - 2\cdot\sqrt{15}} + \sqrt{20 - 10\cdot\sqrt{3} + 4\cdot\sqrt{5} - 2\cdot\sqrt{15}}\right)$
36°	$\frac{1}{8}\left(\sqrt{40 - 8\cdot\sqrt{5}}\right) = \frac{1}{4}\cdot\sqrt{10 - 2\cdot\sqrt{5}}$
39°	$\frac{1}{8}\left(\sqrt{12 + 6\cdot\sqrt{3} + 4\cdot\sqrt{5} + 2\cdot\sqrt{15}} - \sqrt{20 - 10\cdot\sqrt{3} - 4\cdot\sqrt{5} + 2\cdot\sqrt{15}}\right)$
42°	$\frac{1}{8}\left(\sqrt{30 + 6\cdot\sqrt{5}} - \sqrt{6 - 2\cdot\sqrt{5}}\right)$
45°	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$

tabel 5 (1)

de 3° tabel

α	$\sin\alpha = \cos(90° - \alpha)$
48°	$\frac{1}{8}\left(\sqrt{10 + 2\cdot\sqrt{5}} + \sqrt{18 - 6\cdot\sqrt{5}}\right)$
51°	$\frac{1}{8}\left(\sqrt{20 + 10\cdot\sqrt{3} - 4\cdot\sqrt{5} - 2\cdot\sqrt{15}} + \sqrt{12 - 6\cdot\sqrt{3} + 4\cdot\sqrt{5} - 2\cdot\sqrt{15}}\right)$
54°	$\frac{1}{8}\left(\sqrt{24 + 8\cdot\sqrt{5}}\right) = \frac{1}{4}\left(\sqrt{5} + 1\right)$
57°	$\frac{1}{8}\left(\sqrt{20 + 10\cdot\sqrt{3} + 4\cdot\sqrt{5} + 2\cdot\sqrt{15}} - \sqrt{12 - 6\cdot\sqrt{3} - 4\cdot\sqrt{5} + 2\cdot\sqrt{15}}\right)$
60°	$\frac{1}{2}\cdot\sqrt{3}$
63°	$\frac{1}{8}\left(\sqrt{20 + 4\cdot\sqrt{5}} + \sqrt{12 - 4\cdot\sqrt{5}}\right) = \frac{1}{4}\left(\sqrt{5 + \sqrt{5}} + \sqrt{3 - \sqrt{5}}\right)$
66°	$\frac{1}{8}\left(\sqrt{30 - 6\cdot\sqrt{5}} + \sqrt{6 + 2\cdot\sqrt{5}}\right)$
69°	$\frac{1}{8}\left(\sqrt{12 + 6\cdot\sqrt{3} + 4\cdot\sqrt{5} + 2\cdot\sqrt{15}} + \sqrt{20 - 10\cdot\sqrt{3} - 4\cdot\sqrt{5} + 2\cdot\sqrt{15}}\right)$
72°	$\frac{1}{8}\left(\sqrt{40 + 8\cdot\sqrt{5}}\right) = \frac{1}{4}\cdot\sqrt{10 + 2\cdot\sqrt{5}}$
75°	$\frac{1}{4}\left(\sqrt{6} + \sqrt{2}\right)$
78°	$\frac{1}{8}\left(\sqrt{30 + 6\cdot\sqrt{5}} + \sqrt{6 - 2\cdot\sqrt{5}}\right)$
81°	$\frac{1}{8}\left(\sqrt{12 + 4\cdot\sqrt{5}} + \sqrt{20 - 4\cdot\sqrt{5}}\right) = \frac{1}{4}\left(\sqrt{3 + \sqrt{5}} + \sqrt{5 - \sqrt{5}}\right)$
84°	$\frac{1}{8}\left(\sqrt{18 + 6\cdot\sqrt{5}} + \sqrt{10 - 2\cdot\sqrt{5}}\right)$
87°	$\frac{1}{8}\left(\sqrt{20 + 10\cdot\sqrt{3} + 4\cdot\sqrt{5} + 2\cdot\sqrt{15}} + \sqrt{12 - 6\cdot\sqrt{3} - 4\cdot\sqrt{5} + 2\cdot\sqrt{15}}\right)$
90°	1

tabel 5 (2)

Envelop met inhoud

Jan Smit, Leon van den Broek

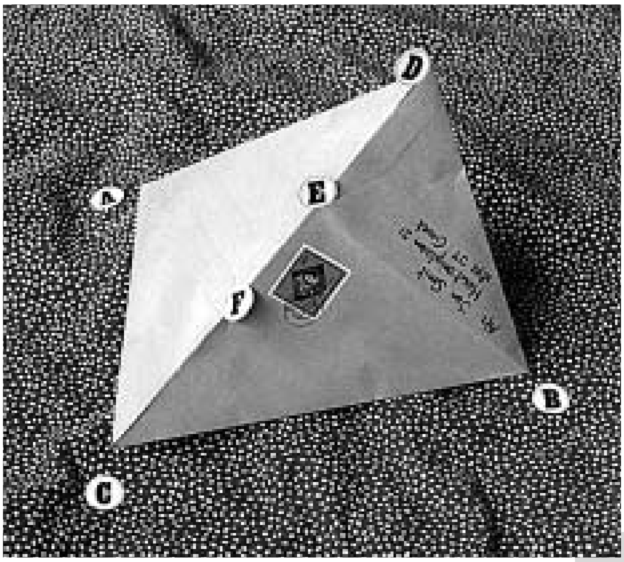
Met een simpele ingreep verandert een gebruikte envelop in een viervlak met vier gelijke grensvlakken. Dat viervlak is onderwerp van ons artikel dat in drie afleveringen zal verschijnen.
In dit eerste deel gaan we op zoek naar een formule voor de inhoud van het viervlak. Ingewikkeld rekenwerk weten we te vermijden door handig tegen het viervlak aan te kijken. Bovendien vinden we zodoende meer fraaie eigenschappen van het viervlak.
In het tweede deel willen we de inhoud van een envelop maximaal maken. Opnieuw is 'kijken' verkieslijk boven 'rekenen'.
Als je uitgaat van een envelop van het bekende A-formaat (de zijden verhouden zich als $1 : \sqrt{2}$), krijg je een heel speciaal geval: het A-viervlak. En dat blijkt buitengewoon interessant te zijn.
In het derde en laatste deel zien we dat sommige ruimtevullende lichamen ook 'zelfvullend' zijn. Ons A-viervlak is er zo een. Het blijkt zelfs een Voronoi-cel te zijn.

De constructie

De envelop met hoekpunten *A*, *B*, *E* en *F* is aan de bovenkant opengesneden. Op de rand *EF* nemen we aan de adreskant een punt *C* en aan de afzenderkant een punt *D*, *D* even ver van hoekpunt *E* als *C* van hoekpunt *F*. Vouw nu langs de lijnen *AC*, *BC*, *AD* en *BD*, zodat *C* naar voren komt en *D* naar achteren gaat. Met plakband langs *CD* maken we de envelop weer dicht. Viervlak *ABCD* is ons studieobject.



figuur 1a



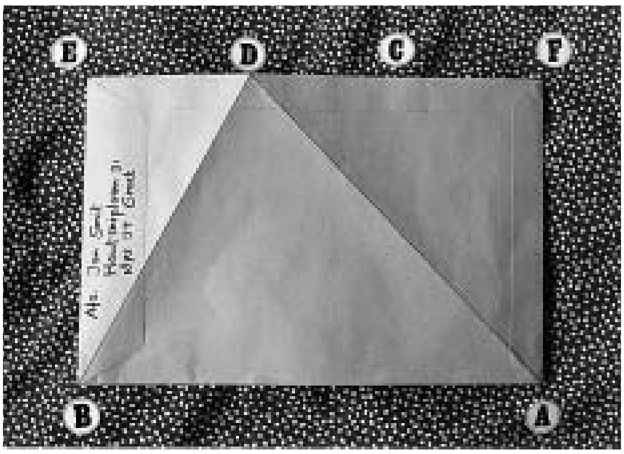
30

figuur 2

Van der Vegt noemt het viervlak een disphenoïde (zie [**1**]; grieks: dys = moeilijk, faino = zich vertonen, eidos = vorm). Inderdaad kun je je het lichaam maar moeilijk voorstellen. Het is raadzaam met een envelop daadwerkelijk de disphenoïde te laten ontstaan. Dat helpt.

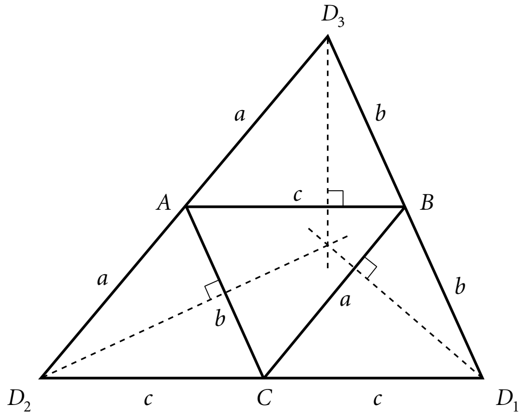
De uitslag van het viervlak

Net als bij de bekende Platonische veelvlakken zijn bij ons viervlak alle grensvlakken gelijk en zien alle hoeken er hetzelfde uit. Zetten we het viervlak met grensvlak



figuur 1b

ABC op tafel en snijden we het langs de opstaande ribben open, dan krijgen we de uitslag van figuur 3.



figuur 3

Je kunt ook uitgaan van een willekeurige scherphoekige driehoek $D_1D_2D_3$ met zijden $2a$, $2b$ en $2c$. Door de middens van de zijden te verbinden, wordt deze driehoek verdeeld in vier congruente driehoeken. Vouwen we de buitenste driehoeken naar boven dan komen D_1, D_2 en D_3 samen in één punt. Dat punt ligt loodrecht boven het hoogtepunt van driehoek $D_1D_2D_3$. Hier hebben we een ruimtelijke demonstratie van de planimetrie-stelling: *de drie hoogtelijnen van een driehoek gaan door één punt.*
Driehoek $D_1D_2D_3$ moet scherphoekig zijn anders ontmoeten D_1, D_2 en D_3 elkaar niet. (De hoeken van driehoek $D_1D_2D_3$ moeten bij elkaar komen; de drie hoeken moeten dus een ruimtehoek vormen. Dat kan alleen maar als elk tweetal van de hoeken van de driehoek opgeteld groter is dan de derde hoek; en dat is alleen zo bij een scherphoekige driehoek.)
Als de driehoek rechthoekig is, ontaardt het 'viervlak' in een platte figuur en is de inhoud dus 0.

De inhoud

Het viervlak heeft drie paren overstaande ribben. De overstaande ribben zijn even lang; zeg dat de lengten a, b en c zijn. Door deze lengten is het viervlak op spiegeling na bepaald. (Als je de punten D_1, D_2 en D_3 naar beneden vouwt in plaats van naar boven, krijg je een viervlak dat spiegelcongruent is met het vorige.) Dus ligt met de lengten a, b en c de inhoud van het viervlak vast. Dit doet je denken aan de formule van Heron voor de oppervlakte van een driehoek met zijden a, b en c: opp $= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$, met $s = \frac{1}{2}(a+b+c)$.
Is er voor ons viervlak ook zoiets?
Charles Dodgson – beter bekend als Lewis Carroll, de schrijver van 'Alice in Wonderland' – vermaakte zich met dit soort problemen als hij in bed lag en niet kon slapen. In zijn boekje 'Pillow Problems' (1893) geeft hij een verzameling van 72 opgaven met antwoorden en uitwerkingen (zie [**2**]). Opgave 59 luidt:
Given a tetrahedron, having every edge equal to the opposite edge, so that its facets are all (when looked at from the outside) identically equal: find its volume in terms of its edges.
Zijn oplossing neemt drie hele bladzijden in beslag en bevat naar de mode van die tijd veel goniometrie. Als antwoord verschijnt:

$$inhoud = \frac{1}{3}abc\sqrt{\cos\alpha \cdot \cos\beta \cdot \cos\gamma}$$

Met de cosinusregel kun je dit herleiden tot:

$$inh. = \frac{1}{6\sqrt{2}}\sqrt{(b^2+c^2-a^2)(a^2+c^2-b^2)(a^2+b^2-c^2)}$$

Deze uitkomst vinden we ook in het boekje van de Poolse wiskundige Hugo Steinhaus (zie [**3**], opgave 37).

Hier zou de lezer zelf aan de slag moeten gaan om de formule af te leiden. Het zou hem waarschijnlijk hetzelfde vergaan als ons: veel ondoorzichtig rekenwerk, waarbij de symmetrie van de af te leiden formule geheel zoek is. Als troost kan dienen dat dat ook in [**2**] en [**3**] het geval is. De voor de hand liggende aanpak die daar gevolgd wordt via

$$\frac{1}{3} \cdot grondvlak \cdot hoogte$$

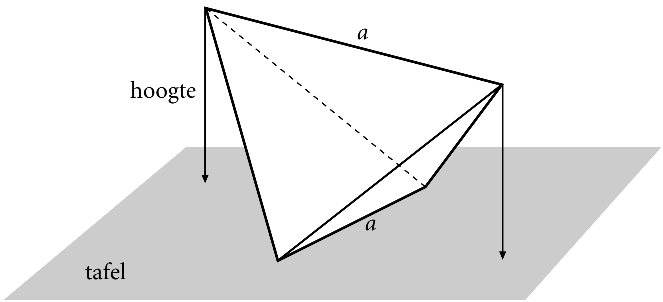
blijkt namelijk tot ingewikkelde rekenpartijen te leiden. Maar als je volhoudt, kom je er wel uit.
We kunnen de laatste formule nog wat fatsoeneren door (naar het voorbeeld van Heron) voor de halve som van de kwadraten p^2 te schrijven:

$$p^2 = \frac{1}{2}(a^2+b^2+c^2).$$

We krijgen dan:

$$inhoud = \frac{1}{3}\sqrt{(p^2-a^2)(p^2-b^2)(p^2-c^2)}$$

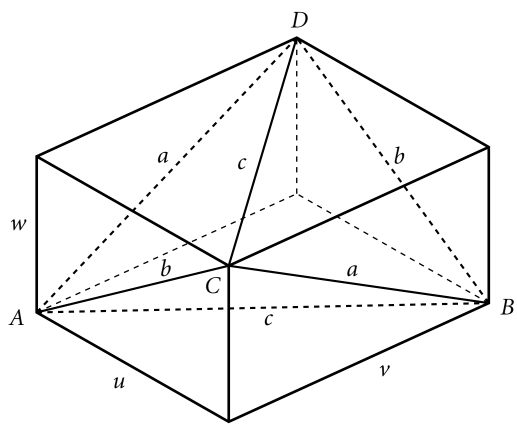
Bij zo'n mooie formule vermoed je ook een mooie afleiding. Die kwamen we op het spoor toen we het viervlak met een ribbe op tafel plaatsten met de overstaande ribbe evenwijdig aan de tafel (figuur 4). De hoogte van die ribbe boven de tafel (dat is de afstand tussen de twee overstaande ribben) bleek gelijk te zijn aan $\sqrt{p^2-a^2}$, waarbij a de lengte is van de betreffende overstaande ribben.
Toen pas werd het ons allemaal duidelijk. Ruimtelijk inzicht krijg je kennelijk niet cadeau. Eerst moet je van alles proberen en dan vind je plotseling de juiste aanpak.



figuur 4

De afleiding

Een willekeurig viervlak kan gevat worden in een parallellepipedum en wel zodanig dat de ribben van het viervlak diagonalen zijn van de grensvlakken van dat parallellepipedum. Ieder paar overstaande ribben bepaalt eenduidig een paar evenwijdige vlakken, waarin die ribben liggen. Zo krijg je drie paar evenwijdige vlakken. Die snijden in de ruimte juist het bewuste parallellepipedum uit.
Van de disphenoïde zijn de overstaande ribben even lang; en dat zijn de diagonalen van een grensvlak van het omgeschreven parallellepipedum. Daarom zijn de grensvlakken van het parallellepipedum rechthoeken en is het parallellepipedum dus zelfs een balk.



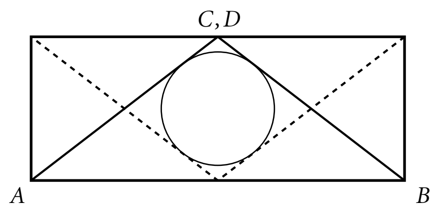
figuur 5

Zeg dat de afmetingen van de balk zijn: u, v en w. We snijden van de balk vier piramides af via de snijvlakken ABC, ABD, ACD en BCD; zie figuur 5. Blijft over ons viervlak met inhoud $uvw - 4 \cdot \frac{1}{6} \cdot uvw = \frac{1}{3} \cdot uvw$. De inhoud van het viervlak is éénderde van de inhoud van de omvattende balk. De lichaamsdiagonaal van de balk noemen we p.
Dus
$p^2 = u^2 + v^2 + w^2 = \frac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2)$.
Er geldt:
$u^2 = p^2 - a^2$, $v^2 = p^2 - b^2$ en $w^2 = p^2 - c^2$.

De inhoud van het viervlak is dus
$\frac{1}{3}\sqrt{(p^2 - a^2)(p^2 - b^2)(p^2 - c^2)}$.
Uit het bovenstaande volgt nog een keer dat driehoek $D_1D_2D_3$ scherphoekig moet zijn. Immers $p^2 - a^2$, $p^2 - b^2$ en $p^2 - c^2$ moeten alle drie positief zijn, dus elk tweetal van de drie kwadraten a^2, b^2 en c^2 moet opgeteld groter zijn dan het derde kwadraat. En dat is alleen zo bij een scherphoekige driehoek.

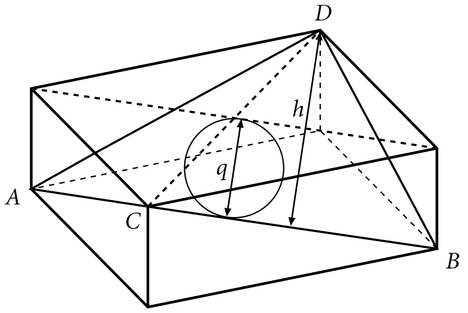
Nog meer fraais

De situering van de disphenoïde in een balk heeft nog meer voordelen. Je ziet zo onmiddellijk dat de drie verbindingslijnen van de middens van de overstaande ribben van het viervlak loodrecht op elkaar staan en elkaar snijden in het middelpunt van de balk. Dit punt is tevens het middelpunt van de omgeschreven bol van het viervlak (en van de balk).
Het is ook het middelpunt van de ingescheven bol van het viervlak. De ingeschreven bol kun je zien door in de richting van CD naar de balk met viervlak en ingeschreven bol te kijken (figuur 6).



figuur 6

Voor de diameters p en q van achtereenvolgens de om- en ingeschreven bol geldt:
$p^2 = u^2 + v^2 + w^2$ en $q^{-2} = u^{-2} + v^{-2} + w^{-2}$.
Het bewijs hiervan laten we aan de lezer over.
Uit deze formules kun je afleiden dat p tenminste 3 keer zo groot is als q ($p = 3q$ alleen als $u = v = w$).
Interessant is ook dat dezelfde balk nog een tweede disphenoïde bevat, spiegelcongruent met de eerste. Die krijg je door juist de andere vier hoekpunten van de balk te gebruiken. Beide viervlakken hebben een gemeenschappelijke omgeschreven bol en ook de ingeschreven bol hebben ze gemeen. Deze laatste bol raakt aan ieder vlak dat door precies drie hoekpunten van de balk gaat. Er zijn acht van die schuine vlakken en die snijden in de balk een (niet regelmatig) achtvlak uit.
Nu kunnen we ook de hoogte h van het viervlak geven, dat is de afstand van een hoekpunt tot het tegenoverliggende grensvlak. Als we zó naar de balk met viervlak en ingeschreven bol kijken dat we vlak ABC als een lijn zien (figuur 7), blijkt dat $h = 2q$.



figuur 7

Dit is ook als volgt te bewijzen. Verdeel de disphenoïde in vier congruente piramides, ieder met een zijvlak van de disphenoïde als grondvlak en het middelpunt van de ingeschreven bol als top en dus de straal $\frac{1}{2}q$ als hoogte. Omdat de inhoud van zo'n piramide een kwart van de inhoud van de hele disphenoïde is, moet de hoogte van zo'n deel ook een kwart van de hoogte van het geheel zijn, dus $\frac{1}{2}q = \frac{1}{4}h$.
Uit de hoogte en de inhoud van een disphenoïde met ribben a, b en c kunnen we de oppervlakte van een grensvlak bepalen. We vinden: $\frac{1}{2}\sqrt{u^2v^2 + v^2w^2 + w^2u^2}$, wat met een beetje manipulatie herleid kan worden tot $\frac{1}{4}\sqrt{(a^2 + b^2 + c^2)^2 - 2(a^4 + b^4 + c^4)}$, een concurrent voor de formule van Heron.

literatuur

1 *A.K. van der Vegt*
Regelmaat in de ruimte
Delftse Uitgevers Maatschappij (1991)
ISBN 90-6562-141-5

2 *Lewis Carroll*
Pillow Problems
Dover Publications (1958)

3 *H. Steinhaus*
One hundred problems in elementary mathematics
Dover Publications (1964)
ISBN 0-486-23875-X

Ingezonden

Een brief van een collega uit Bulgarije, met wie uw hoofdredacteur enige tijd heeft gecorrespondeerd en die actief bezig was met het wiskundeonderwijs in zijn land.

Bl. 58-6-28
1945 Sofia
19. XI. 96

Dear Mr Hoogland,

Thank you very much for your letter from July, and please, excuse my great delay.
The economic situation in Bulgaria is very hard now. The country is going bankrupt. In the last one year my month salary as a teacher has decreased (in $) more than 3 times. So in August 96 it was 35 !! I had to change my job.

Pythagoras in de praktijk

Gratis video!

'Pythagoras in de praktijk' behandelt een toepassing van de beroemde stelling. Deze gratis videoproductie duurt tien minuten en is bedoeld voor de klassen waar in de lesmethode de toepassing van de stelling van Pythagoras aan bod komt. Uit de vele mogelijke voorbeelden is gekozen voor de straatmakerspraktijk.

3-4-5-steek

Als een straatmaker een straat maakt dan gebruikt hij de 3-4-5-steek. Met behulp van deze drie getallen zorgt hij ervoor dat het straatwerk haaks komt te liggen. In 'Pythagoras in de praktijk' neemt reporter Hein Hansen een kijkje bij een straatmakersploeg. Hij komt in gesprek met een straatmaker in opleiding. Deze straatmaker vertelt hoe hij de 3-4-5-steek gebruikt om het straatwerk haaks op te zetten. De uitleg van de straatmaker wordt ondersteund door wiskundige animaties.

Aanvragen

De video is een product van Go Infra Campagne en kan gratis worden aangevraagd bij het Infra Infocentrum. U kunt een briefje zonder postzegel sturen aan:

Go Infra Infocentrum
Antwoordnummer 10148
2800 VB Gouda

Vermeld daarin:
Ja, stuur mij gratis
☐ Pythagoras in de praktijk (video)
☐ Meer informatie Go Infra Campagne
☐ Beide

Naam, functie (docent of decaan), School + Adres + Tel.

Infra Infocentrum is bereikbaar van ma t/m vr van 09.00 - 12.30 uur; tel: 0900 - 821 22 23 (20 ct p/min).

TWIN

Op 21 januari jongstleden is het TWIN-project officieel van start gegaan. TWIN staat voor Techniek, Wiskunde, Informatietechnologie en Natuurkunde in het MTO. De dragers van het project zijn het Freudenthal instituut, de Hogeschool van Utrecht, de SLO en het ROC Eindhoven. Waarom TWIN? Een nieuw type leerling zal vanaf augustus vanuit de onderbouw het MTO instromen. De (onder andere wiskundige) vaardigheden van deze leerling zijn fundamenteel anders geworden. Om hierop aan te kunnen sluiten en om een betere aansluiting te vinden bij de theoretisch-technische vakken in het MTO zijn de derde generatie eindtermen ontwikkeld.
Er zijn nog geen nieuwe wiskundemethoden die voldoen aan de nieuwe eindtermen. Daarom wordt in het TWIN-project keihard gewerkt om lesmateriaal te ontwikkelen dat in augustus van dit jaar op de markt zal verschijnen. Maar er gebeurt meer: nieuwe informatietechnologieën worden ingepast in TWIN, nieuwe toetsvormen worden ontwikkeld en een databank wordt opgezet. Bovendien zal deskundigheidsbevordering van MTO-docenten een grote plaats in TWIN krijgen. Dit zal onder andere via studiedagen worden gerealiseerd. Op dit moment nemen 35 ROC's deel aan TWIN.
Het TWIN-projectplan is met terugwerkende kracht goedgekeurd per 1 oktober 1996 in het kader van de regeling BVE2000. De duur van het project is vooralsnog drie jaar.

Namens het Platform Wiskunde MTO,
Michel van Glabbeek

Informatie:
drs. V. Jonker, projectleider
e-mail: twin@fi.ruu.nl
http://www.fi.ruu.nl/twin

Pythagoras had een broek aan Het mystieke, het mathematische, en de uitsluiting van meiden

Pythagoras was een Griek met een hang naar Oosterse religies. Vandaar dat hij naar Perzisch gebruik een broek ging dragen. Volgens Margaret Wertheim heeft de ondervertegenwoordiging van vrouwen in de exacte vakken te maken met 'de broek van Pythagoras'. Het gaat haar om de verbinding van exacte wetenschap met religie, van het mathematische met het mystieke, die ook in onze tijd voorkomt. Vrouwen kregen geen belangrijke posities in de kerk, maar ook niet in de exacte wetenschappen. Dezelfde culturele krachten hebben in beide domeinen vrouwen uit de centra van kennis en macht gehouden.
Deze uitdagende visie ontwikkelt Margaret Wertheim in haar culturele geschiedenis van de exacte wetenschappen. Bij het verschijnen van de Nederlandse vertaling van haar boek 'De broek van Pythagoras' organiseert het Bezinningscentrum van de Vrije Universiteit een avond met haar over dit thema. Na Wertheims lezing beginnen Ida Stamhuis (wetenschapsgeschiedenis), Mieke Kapteijn (didactiek) en Willem B. Drees (theologie en natuurwetenschappen) de discussie. De avond is op 6 maart van 19.30-21.45 uur in het Auditorium in het hoofdgebouw van de VU, De Boelelaan 1105, Amsterdam.

Inlichtingen:
Bezinningscentrum VU
De Boelelaan 1115
1081 HV Amsterdam
tel. 020-444 5670
email: WB.Drees@dienst.vu.nl

Chaos en deelbaarheid

Victor Schmidt

Wat vooraf ging

Het gedrag van de omvang van een populatie (dieren, planten of mensen) met beperkte leefruimte kan worden beschreven in een niet-lineair model. Een mogelijke gedragsvergelijking luidt

$$x_n = 4x_{n-1}(1 - x_{n-1})$$

waarbij x_n de omvang van de populatie voorstelt op peilmoment n. In een vorig artikel bleek dat deze vergelijking de evenwichtsoplossing $\frac{3}{4}$ en oneindig veel periodieke oplossingen heeft. De periodieke oplossingen worden in dit artikel nader geanalyseerd met als resultaat een aantal deelbaarheidsstellingen.

Van een periodieke oplossing voldoen alle waarden aan een vergelijking van de vorm $x_{n+k} = x_n$. De oplossing heeft in dat geval een periode die gelijk is aan k of aan een deler van k. Alleen de getallen $\sin^2 1/N\pi, \sin^2 2/N\pi, \ldots, \sin^2 \frac{1}{2}(N-1)/N\pi$, waarbij $N = 2^k - 1$ of $N = 2^k + 1$ voldoen aan deze vergelijking. Er is dus sprake van twee eindige rijtjes met getallen van deze vorm: een met $N = 2^k - 1$ en een tweede met $N = 2^k + 1$. Sommige getallen uit een rij horen echter bij een oplossing met periode d, waarbij d een deler is van k. In dat geval kan de breuk met noemer N vereenvoudigd worden tot een breuk met als noemer $2^d - 1$ of $2^d + 1$. We bekijken een aantal bijzondere gevallen.

Fermat

Veronderstel dat k een priemgetal is. Dan heeft k afgezien van 1 geen enkele deler. In één van beide rijtjes moet de evenwichtsoplossing zijn verscholen. Omdat $x_n = \sin^2 \frac{1}{3}\pi = \frac{3}{4}$ de evenwichtsoplossing is, moet in één van beide rijen de breuk met noemer N vereenvoudigd kunnen worden tot $\frac{1}{3}$. Dat is alleen het geval als N deelbaar is door 3. De vraag is dus welke van beide noemers deelbaar is door 3: $2^k - 1$ of $2^k + 1$?

In elk geval staat vast dat beide noemers niet elk door 3 gedeeld kunnen worden. Hun verschil is 2 en twee drievouden verschillen altijd tenminste 3 van elkaar. Als k een priemgetal is, is k gelijk aan 2 of een oneven getal. In het eerste geval is $2^k - 1$ gelijk aan 3. In het tweede geval gebruiken we dat k oneven is en daarmee kan met behulp van volledige inductie aangetoond worden dat $2^k + 1$ een drievoud is.

De evenwichtsoplossing komt dus, als k een oneven priemgetal is, voor in het rijtje met noemer $2^k + 1$. Dat betekent dat in de andere rij, waar de noemer gelijk is aan $2^k - 1$, uitsluitend getallen voorkomen die samen één of meer oplossingen met periode k vormen en dat betekent dat het aantal getallen uit die rij deelbaar moet zijn door k. Dit aantal is gelijk aan $\frac{1}{2}(N-1) = \frac{1}{2}(2^k - 1 - 1) = 2^{k-1} - 1$. Conclusie: voor alle priemgetallen k ongelijk aan 2 is $2^{k-1} - 1$ deelbaar door k.
Deze conclusie is een bijzonder geval van de zogenaamde kleine stelling van Fermat, die zegt dat $a^{p-1} - 1$ deelbaar is door p als p een priemgetal ongelijk aan 2 is.

Andere bijzonderheid

We kunnen ook de situatie bekijken waarin een noemer uit de getallenrijtjes een priemgetal is. Als $2^k + 1$ een priemgetal is, dan is nergens de breuk met noemer $N = 2^k + 1$ uit het rijtje getallen $m/N\pi$ te vereenvoudigen. Daarom kunnen er in dit rijtje geen getallen voorkomen die een oplossing met een kleinere periode dan k genereren. Alle getallen $m/N\pi$ genereren één of meer oplossingen $\sin^2 m/N\pi$ met periode k en daarom moet het aantal deelbaar zijn door k. Het aantal getallen uit het rijtje met noemer $2^k + 1$ is gelijk aan $\frac{1}{2}(N-1) = \frac{1}{2}(2^k + 1 - 1) = 2^{k-1}$. Kennelijk moet 2^{k-1} een veelvoud van k zijn. Dat kan alleen maar als k een macht van 2 is.

Conclusie: als $2^k + 1$ een priemgetal is, dan is k een

macht van 2. Is k géén macht van 2, dan is $2^k + 1$ géén priemgetal. De getallen $2^k + 1$ met $k = 2^m$ heten Fermatgetallen. De eerste vijf Fermatgetallen blijken priemgetallen te zijn, de daaropvolgende vijftien niet.

Dezelfde redenering kan ook gehouden worden als $2^k - 1$ een priemgetal is. In dat geval is $\frac{1}{2}(N - 1) = 2^{k-1} - 1$ en luidt de conclusie: als 2^k - 1 een priemgetal is, is $2^{k-1} - 1$ een veelvoud van k. Uit de getaltheorie is bekend, dat uit de deelbaarheid van $2^{k-1} - 1$ door k volgt dat k een priemgetal is. Deze kleine stelling van Fermat geldt dus ook omgekeerd. Daarom kan $2^k - 1$ alleen een priemgetal zijn als k een priemgetal is.

Mersenne

Helaas geeft bovenstaande conclusie geen zekerheid over de vraag of $2^p - 1$ een priemgetal is als p er een is. Eigenlijk wordt weinig toegevoegd aan wat al lang bekend is. Is k geen priemgetal, dan geldt dat $2^k - 1 = (2^d - 1)(1 + 2^d + 2^{2d} + \ldots + 2^{(m-1)d})$, waarbij d een willekeurige deler van k is en $m = k/d$. Daarom is $2^k - 1$ met zekerheid géén priemgetal als k er geen is.

De vraag of $2^p - 1$ een priemgetal is als p dat is, is een oud probleem uit de getaltheorie. De zeventiendeeeuwse wiskundige Mersenne wist met eenvoudige hulpmiddelen uit zijn tijd voor een aantal priemgetallen p te bepalen of $2^p - 1$ een priemgetal is. Deze getallen zijn naar hem genoemd. Tegenwoordig worden computers ingezet om te bepalen of een getal van de vorm $2^k - 1$ een priemgetal is. Een analytische methode is tot op de dag van vandaag niet bekend. Ook is men niet in staat gebleken een methode te construeren op basis van de chaostheorie.

Toch kan de theorie enig soelaas bieden bij het zoeken naar priemfactoren van $2^p - 1$ als p een priemgetal ongelijk aan 2 is. De getallen $\sin^2 m/N\pi$ met $N = 2^p - 1$ en $m \leq \frac{1}{2}(N - 1)$ vormen één of meer oplossingen van de gedragsvergelijking met periode p. De evenwichtsoplossing komt niet voor in de rij getallen van deze vorm.
Als voorbeeld bekijken we $p = 11$ en $N = 2^{11} - 1 = 2047$. Is 2047 een priemgetal? De meest eenvoudige manier om deze vraag te beantwoorden bestaat er uit alle priemgetallen die kleiner zijn dan $\sqrt{2047}$ op te sporen en 2047 door elk van deze getallen te delen. Is 2047 deelbaar door één van deze priemgetallen, dan is hij zelf geen priemgetal.

Is 2047 deelbaar door bijvoorbeeld 13? Het antwoord is nee. Omdat 13 een priemgetal is, zegt de kleine stelling van Fermat dat $2^{12} - 1$ deelbaar is door 13. Zou nu m/N voor een of andere waarde van m te vereenvoudigen zijn tot $\frac{1}{13}$, dan zou het bijbehorende rijtje sinussen een oplossing met periode 12 of een deler daarvan bevatten. Dat is uiteraard onverenigbaar met de periode van 11, omdat de evenwichtsoplossing niet voorkomt in de getallenrij. Om dezelfde reden is 2047 niet deelbaar door 37, want $2^{36} - 1$ is deelbaar door 37 en $\sin^2 \frac{1}{37}\pi$ is startwaarde van een oplossing met periode 36, 18, 12, 9, 6, 4, 2 of 1. Geen van deze mogelijkheden verdraagt zich met een periode van 11.

Welke priemgetallen komen dan wel in aanmerking? 2047 blijkt deelbaar te zijn door 23. Het getal $\sin^2 \frac{1}{23}\pi$ vormt het startpunt van een oplossing met periode 22, 11 of 1. Dat spoort natuurlijk heel goed met de oplossingen met $N = 2047$.
Aan de hand van deze redenering is het in te zien, dat voor de eventuele priemfactoren f van $2^p - 1$ geldt, dat $f - 1$ een veelvoud is van p. Omdat elke deler d het produkt van een aantal priemfactoren is, geldt dat $d - 1$ ook deelbaar is door p, als d een deler is van $2^p - 1$. Het is mij niet gelukt om aan de hand van deze informatie een criterium te formuleren, waaruit blijkt voor welke p $2^p - 1$ een priemgetal is. Wel is een eenvoudig recept gevonden om na te gaan of $2^p - 1$ priem is: probeer of $2^p - 1$ deelbaar is door $p + 1$, door $2p + 1$, door $3p + 1$, enzovoorts, zo lang $mp + 1 \leq \sqrt{2^p - 1}$.

Slot

Hiermee is de serie artikelen over enkele beginselen van chaostheorie ten einde. Het optreden van chaos toont de beperkingen aan van eenvoudige wiskundige modellen voor dynamische systemen. Lineaire modellen vertonen veelal een voorspelbaar gedrag en daarom worden vaak op basis van deze modellen voorspellingen gedaan. Niet altijd komen deze voorspellingen uit. Sterker nog, het gedrag van het systeem lijkt zich niets van het model aan te trekken en voorspellers moeten met het schaamrood op de kaken hun ongelijk bekennen. Inzicht in *chaos*theorie kan het voorkomen van wat in het dagelijks spraakgebruik ‘chaos’ heet inzichtelijker maken.

Afgelopen zomer werd in het Spaanse Sevilla het achtste International Congress on Mathematical Education gehouden. Eén van de deelnemers was Anders Vink. In dit artikel geeft hij in een interview zijn mening over het congres in het bijzonder en het wiskundeonderwijs in het algemeen.

Van ICME-8 tot het Nederlandse wiskundeonderwijs

Anders Vink werkt voor 7/10 als tweede-graadslerarenopleider aan de Hogeschool Rotterdam en Omstreken. Daarvoor was hij docent wiskunde in het voortgezet onderwijs. Voor een deel van zijn werktijd bij de hogeschool is hij als nascholer bij het APS gedetacheerd.

Wat vind je van ICME-8? Beantwoord het tot nu toe aan je verwachtingen?
Ik ben hier blanco naar toe gekomen en had nauwelijks idee van wat me te wachten stond. Het congres lijkt op de Olympische Spelen met alle takken van sport, althans zo stel ik me die voor: zoveel mensen, zoveel activiteiten tegelijkertijd. Ik zit in de werkgroep 'lerarenopleiding'. Daar worden veel discussies gevoerd die ik in Nederland al eerder heb meegemaakt. Die discussies worden erg door de aanwezige Amerikanen gedomineerd. Ook hier gaat dus de vergelijking met de Olympische Spelen op. Misschien had ik me wat beter moeten voorbereiden en bijvoorbeeld het materiaal moeten meenemen dat we voor de bijscholing hebben ontwikkeld en dat nu op veel tweedegraads lerarenopleidingen als lesmateriaal gebruikt wordt. Want dat materiaal mag best gezien worden. Ook al kunnen de buitenlanders dan het Nederlands niet lezen, de sfeer zullen ze herkennen en waarderen. En het past heel goed bij waarover we het in onze werkgroep hebben.
Wat ik niet verwacht had, maar wel als heel inspirerend ervaar, is dat je van het ontbijt, onder de borrel, tot en met het diner (en dat begint hier in Spanje na tienen 's avonds) over wiskundeonderwijs praat. Nee, ik heb er geen spijt van hier naar toe te zijn gegaan.

Wat zijn voor jou de belangrijkste pluspunten?
Ik leer hier veel, want ik kom in aanraking met aspecten van wiskundeonderwijs waaraan ik in Nederland niet toekom. Voorbeelden zijn: het gender-aspect, hoe andere landen het wiskundeonderwijs hebben opgezet, en dan met name hoe ze over lerarenopleiding denken. In dit verband moet ik bijvoorbeeld het Amerikaanse NCTM-handboek noemen met de standaards voor de inrichting van het wiskundeonderwijs en de lerarenopleiding (al tijdens ICME-7, vier jaar geleden in Québec, beschikbaar, BZ), *niet omdat het allemaal zo goed is wat er in staat, wel om ons eigen Nederlandse gelijk wat te relativeren. Maar wat ik het meest waardevol vind, zijn de contacten en dan niet in de laatste plaats met de andere hier aanwezige Nederlanders.*

Bespeur je trends in het wiskundeonderwijs hier op ICME-8?
Ja, de realistische wiskunde, waarin we in Nederland al aardig gevorderd zijn, slaat overal aan. Alleen, iedereen lijkt wel zelf het wiel te willen uitvinden. Waar ook iedereen mee bezig is, is het implementeren van nieuwe technologie in het wiskundeonderwijs: de grafische rekenmachine, de computer met symbolische programma's als computeralgebra en -meetkunde, multimedia en Internet. Aan die technologische zaken moeten we thuis in onze eigen opleiding overigens nog veel doen.



Biedt ICME-8 de in groten getale aanwezige 'gewone' wiskundeleraren en -leraressen wel voldoende?
Dat is zeer de vraag. In je werkgroep kun je nog wel wat bijsturen, althans als de opzet en de leiding ervan dat toelaten. Maar de plenaire lezingen vind ik voor gewone leraren en leraressen te theoretisch. De mensen van die voordrachten hadden als basisfilosofie moeten hanteren: die gewone wiskundedocent moet er maandagochtend het derde uur mee verder.

Vertel eens wat meer over je werkgroep.
We hebben een kleine werkgroep van 16 mensen, waardoor iedereen inbreng heeft. De eerste dag waren er een paar inleidingen om de thema's aan te geven, daarna werken we in discussievorm aan een aantal vragen. Een terugkerende vraag is: 'Hoe pak je als lerarenopleider met je studenten een leerplanwijziging aan?' We bediscussiëren ook andere aspecten van een curriculumverandering. Ik noem er een paar. 'De politiek, die verder moet kijken dan alleen de slaagcijfers', 'Hoe kan ervoor gezorgd worden dat de ouders zich niet teveel buitengesloten voelen, in verband met het kunnen helpen van hun kind en de vrees voor niveauverlaging?', 'Het ontbreken van goede evaluaties van experimenten, althans het ontbreken van de mogelijkheid om een concept-leerplan op grond van evaluaties bij te stellen', 'Wat is nu eigenlijk het effect van een leerplanwijziging, want het lijkt erop dat dat onmeetbaar is?, 'Welke attitudes moeten we de leraren- en leraressen-in-spe bijbrengen ten aanzien van wiskunde, docent zijn, nieuwe technologie?', enz.

Naar aanleiding van de attitude van leraren, al dan niet in spe, gaat het interview ongemerkt over in een gesprek over het Nederlandse wiskundeonderwijs.
Anders Vink vertelt over zijn werk als nascholer, dat zich onder andere op het MTO richt. Daarin staat de vraag centraal hoe mto-wiskundedocenten/-scholen 'zelfstandig leren' vorm kunnen geven. Hij vindt dat het leukste én het moeilijkste onderdeel van zijn werk. Leuk, omdat hier allerlei aspecten uit de wiskunde, de wiskundedidactiek en het opleiden tot wiskundeleraar bij elkaar komen en op elkaar betrokken moeten worden. Moeilijk, omdat er in het MTO heel veel overhoop gehaald is of wordt. De structuur van deze onderwijssoort verandert, de schoolorganisatie eveneens, het aantal uren wiskunde gaat omlaag, wiskunde moet zijn taak als servicevak (her)vinden, het leerplan wijzigt, de opzet van de examens is onduidelijk, het is de vraag hoe de voorbereiding van de studenten die naar het hbo willen doorstromen gaat gebeuren en er is nog lang geen zicht op aangepaste leerboeken.

De attitude van wiskundedocenten brengt ons op nog iets anders. Wij zijn verbaasd over het verschijnsel dat leraren met een voltooide universitaire wiskundeopleiding niet altijd in staat blijken bij een leerplanwijziging de wiskundige inhoud van een nieuw onderwerp zelfstandig onder de knie te krijgen. In de bijscholing moet hier dan veel tijd aan besteed worden in plaats van aan hoe een nieuw onderwerp in de klas gebracht kan worden. 'Docentenredzaamheid' moet in de lerarenopleiding apart aandacht krijgen, is onze conclusie.



Vervolgens bespreken we nog een aantal andere vragen. Onze antwoorden, op een Spaans terras aan elkaar gegeven, zijn niet alle even interessant. Ik geef hier alleen de vragen, de lezer wordt uitgenodigd ze zelf te beantwoorden.
Wordt in het realistische wiskundeonderwijs het bewijzen en redeneren, een kernaspect van wiskunde, niet teveel verwaarloosd?
Volgen wiskundedocenten niet te slaafs het boek, waardoor het bijvoorbeeld verboden lijkt om in de

brugklas havo/vwo bij algebra variabelen in te voeren?
Zou het niet beter zijn als bij veranderingen in het wiskundeonderwijs de beroepsvereniging van de Nederlandse wiskundeleraren de centrale instantie is, zoals dat in Denemarken het geval bleek te zijn?
Nu heeft een hele rits instituten wat in de melk te brokkelen: het Freudenthal instituut, de SLO, het Cito, het APS, de lerarenopleidingen, die alle ook financiële oogmerken hebben in een tijd van een terugtredende overheid.
Is Wiskunde A in het vwo eigenlijk niet mislukt, want in de examens komt van probleemoplossen en het zelf mathematiseren van een probleemsituatie niet veel terecht? Hierbij tekenen we nog aan dat het examen voor een leerling met alleen Wiskunde A vaak moeilijk en voor een leerling met ook Wiskunde B erg gemakkelijk is, want hij hoeft maar een heel beperkt aantal vaardigheden te beheersen.

Aan het eind van het gesprek/interview vraag ik Anders of hij nog een slotopmerking heeft?
Ja, eigenlijk twee. Nascholing is een vak apart, waarvoor ik hier op ICME-8 veel nieuwe ideeën heb opgedaan. In tegenstelling tot jouw kritische opmerkingen over de nascholing wiskunde in Nederland (Korrel van Bert Zwaneveld in Euclides 71-6) *wordt de nascholing op het APS wel degelijk geëvalueerd en wordt met de uitkomsten terdege rekening gehouden.*

Bert Zwaneveld

bespreking

Larry Gonick en Woolcott Smith
Het stripverhaal van de Statistiek
ISBN 90-5041-037-5
Epsilon Uitgaven, 1994
f 37,50

Wat is 'Het stripverhaal van de Statistiek'? Het is geen stripverhaal, zoals de titel suggereert. De originele titel 'The Cartoon Guide to Statistics' dekt de lading beter. En cartoons zijn dan ook in ruime mate aanwezig: op elke pagina staan er meerdere. Het is ook geen echt studieboek, zoals er in de Epsilon-serie (waarvan dit boek nummer 32 is), ook wel verschenen zijn. Er staan bijvoorbeeld geen opgaven in. Maar wat is het dan wel? Een geestige inleiding in de statistiek, die reikt van data-analyse tot correlatiecoëfficiënten en hypotheses testen (folder uitgever). En voor wie is het bestemd? 'Alles wat je nodig hebt om er doorheen te komen is een beetje geduld, een beetje nadenken, en een minimum aan rekenvaardigheid' (pag. 6). En dat is, voor iemand die bereid is zich in het onderwerp te verdiepen, inderdaad voldoende. Het is een lees- en leerboek, dat de havo- en vwo-wiskunde-A-stof op het gebied van de waarschijnlijkheidsrekening en statistiek beslaat en daarbij nog een stukje dieper en verder gaat. Onderwerpen zijn: De beschrijvende statistiek uit het havo-wiskunde-A-programma. Elementaire kansrekening. Werken met stochasten. De binomiale en de normale verdeling. Student-verdeling. Discrete en continue kansverdelingen. Steekproefopzet, opzetten van experimenten. Centrale limietstelling. Betrouwbaarheidsintervallen. Toetsen van hypothesen, fouten van de eerste en tweede soort. Vergelijken van 2 populaties. Regressieanalyse. Alles wordt aan de hand van voorbeelden behandeld. Enkele voorbeelden: Markies de Mere met zijn dobbelstenen, de invloed van aspirinegebruik op het voorkomen van hartaanvallen, betrouwbaarheid van opinie-peilingen. Naast de voorbeelden worden de algemene formules en methoden gegeven, vaak met een toelichting. De cartoons zijn zeer functioneel. Ook de informele (maar wiskundig wel correcte) stijl maakt, dat het boek vlot leest. De afwerking had hier en daar wel wat zorgvuldiger gekund: zo ben ik zeker 10 keer een (druk)fout in een formule tegengekomen en ben ik in het boek nergens het woord Poissonverdeling tegengekomen; en de achterkant van het boek had me daar de uitleg wel van beloofd.... Maar afgezien daarvan heb ik het boek met veel plezier gelezen: het meldt veel dingen, die ik mijn leerlingen ook vertel (ik ben leraar in de bovenbouw havo-vwo), en het gaat net een beetje verder. En als introductie in de statistiek is het boek zeker geslaagd.

Zwaantje Warmelink

Jaarrede 1996

In het afgelopen jaar heeft de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren twee zeer grote verliezen geleden. Jan Breeman, een uiterst bekwaam lid van ons bestuur, en Piet Vredenduin, één van onze ereleden die in het verleden van ontzaglijk grote waarde is geweest.

Jan Breeman was in veel opzichten zijn tijd ver vooruit. Het doceren van realistische wiskunde, zoals opgezet in de vakken Wiskunde-A, heeft internationaal gezien veel opzien gebaard en navolging gekregen. Jan heeft van het begin af aan deze vakken op hoog niveau weten over te brengen op de jeugd. Het was geen wonder dat juist hij de initiator en voorzitter was van de door de vereniging ingestelde Werkgroep Interpretatie Eindexamenprogramma Wiskunde-A (WIEWA), die voor ons de mogelijkheden van de leerstof onderzocht en de afbakening tot stand bracht.

Wie op 23 Maart in het Coenecoop College in Waddinxveen bij de herdenkingsbijeenkomst geweest is, zal gezien hebben dat Jan al een wiskundewerklokaal had. Ontelbaar zijn de attributen in het lokaal, die gebruikt werden om te stimuleren, te verhelderen en te onderzoeken.
Hoewel menigeen van ons wel zal moeten toegeven dat het gebruik van computers in onze lessen maar moeizaam tot stand komt, was voor Jan het werken met de computer een grote liefde. Hij heeft zeer veel gebruikersvriendelijke software gemaakt en zal ongetwijfeld het gebruik van de computer op didactisch verantwoorde wijze in zijn lessen hebben kunnen inbedden. In de vakontwikkelgroep heeft Jan veel van zijn creatieve vermogens aangewend om te zorgen voor mooie nieuwe programma's voor de tweede fase. Zijn ideeën voor de invulling van de zogenaamde ZEBRA-ruimte hopen wij als vereniging te kunnen uitwerken. Het ligt in de bedoeling om de leerboekjes die voor de ZEBRA-ruimte zullen worden gemaakt, de Breemanreeks te noemen. Bij de samenstelling van eindexamenopgaven is inschatting van gewenst niveau en goede formulering van het grootste belang. Jan heeft er veel voor gedaan om het niveau hoog te houden, maar te zorgen dat er geen misverstanden bij de formuleringen konden ontstaan.
Hij heeft belangrijk werk verricht in een ACD, bij de vaksectie havo/vwo van de CEVO en bij de technische realisatie van de examens op het Cito. Binnen het bestuur is regelmatig geprofiteerd van zijn grote creativiteit en van de beminnelijke manier waarop hij met iedereen, ook met diegenen die het met hem oneens waren, om kon gaan. Bij de organisatie van de jaarvergadering speelde hij een belangrijke rol en daarom ook voelen we het gemis van hem en alles wat hij voor ons deed, extra sterk op deze dag.

Ons erelid Piet Vredenduin heeft gedurende tientallen jaren zowel voor de vereniging als voor het wiskundeonderwijs in het algemeen heel veel betekend.
In het begin van de jaren vijftig waren er twee verenigingen, WIMECOS (leraren WIskunde, MEchanica en COSmographie aan hbs'en en lycea) en LIWENAGEL (Leraren In Wiskunde En Natuurwetenschappen Aan Gymnasia En Lycea). Piet heeft zich veel moeite getroost om, als gymnasiumleraar, lid te mogen worden van WIMECOS. Hij heeft ervoor gestreden, dat er één vereniging kwam waar alle leraren van Gymnasia, HBS'en en Lycea lid van konden worden. Deze integratie heeft de basis gelegd voor onze huidige vereniging, die poogt de belangen van alle Nederlandse wiskundeleraren, op didactisch gebied, te behartigen.
Piet was een groot voorstander van vernieuwing en gelijkschakeling van de wiskunde-programma's van HBS en Gymnasium. Die programma's waren voor 1958 gedurende zeker dertig jaren niet of nauwelijks veranderd. Tussen 1955 en 1958 hebben vele commissies, vrijwel allemaal met hulp van Piet, voorstellen gedaan voor moderniseringen. Tien jaar later werden opnieuw veranderingen in die programma's aangebracht naar aanleiding van een Europees congres over wiskundeonderwijs. Piet heeft toen wederom een belangrijk aandeel gehad bij de totstandkoming van de nieuwe leerstof.
In de redactie van Euclides heeft Piet tientallen jaren heel veel werk verricht. Hij had niet alleen de gave om snel en kundig artikelen te beoordelen, ook kon hij bij gebrek aan kopij heel snel

zelf uiterst waardevolle didactische artikelen schrijven. Ik kan een ieder aanraden eens in oude nummers van Euclides te grasduinen in zijn artikelen, omdat ik ervan overtuigd ben dat nog tot in lengte van jaren wiskundedocenten kunnen leren van de vele adviezen die uit Piets brein zijn ontsproten.
Talrijk zijn ook de leerboeken die door Piet, al dan niet in samenwerking met andere auteurs, zijn geschreven. Ze waren vaak kort en bondig en voorzien van vele mooie opgaven. Ze lieten veel ruimte aan docenten en leerlingen om over bepaalde onderwerpen wat extra uit te weiden.
Dankzij Piet zijn er gedurende lange tijd intensieve en vruchtbare contacten geweest met onze Belgische collega's van de Vlaamse Vereniging van Wiskundeleraars.

Gaarne nodig ik u nu uit om staande één minuut stilte in acht te nemen ter nagedachtenis aan deze twee zeer belangrijke leden van onze vereniging die begin 1996 zijn overleden.

Het bestuur van de NVvW heeft de ontwikkelingen bij de vele programmaveranderingen, die in sneltreinvaart plaats vinden, op de voet gevolgd. Het protest tegen de onverantwoorde haast die bij de invoering van de tweede fase van bovenaf geëist wordt, heeft in politiek Nederland geen effect gehad. In samenwerking met het Freudenthal instituut (Fi), de Stichting Leerplan Ontwikkeling (SLO), het Algemeen Pedagogisch Studiecentrum (APS) en een groot aantal vrijwilligers uit wiskundig Nederland, wordt getracht in de te beperkte tijd er het beste van te maken.

Wij zijn verheugd over het feit dat veel van de voorstellen over de examenprogramma's havo/vwo die wij, met hulp van de raadplegingen onder de leden, aan de stuurgroep hebben gedaan, overgenomen zijn. De experimenten voor de tweede fase in het vwo, waar met moeite toestemming voor gekregen was, verlopen voor een gedeelte verrassend goed. Medewerkers van het Freudenthal instituut ontwikkelen in het zogenaamde PROFI-project verscheidene nieuwe stukjes wiskunde en proberen de pakketjes uit op twee scholen.
De grafische rekenmachine (GR) wordt intensief gebruikt en het effect daarvan op het leerproces kan inzicht gaan geven over de mogelijkheden in de toekomst. Het gevaar dat leerlingen bewijskracht gaan ontlenen aan resultaten, gevonden met de GR, moet voorkomen worden. Het inbedden van de GR en de computer in het onderwijs zal ons inziens met veel zorg moeten geschieden. De NVvW heeft bij de SLO een aanvraag ingediend voor onderzoek naar de mogelijkheden van technologische hulpmiddelen bij het wiskundeonderwijs.
Een afbakening van toegestane hulpmiddelen op het Centraal Examen is een bezigheid die bijna jaarlijks zal moeten gebeuren, omdat de ontwikkelingen dermate snel gaan, dat verleggen van grenzen onontkoombaar lijkt. Voor het eerst is op twee scholen geëxperimenteerd met het gebruik van de GR op het eindexamen. De eerste indrukken zijn zo, dat men kan verwachten dat het gebruik in de toekomst positieve effecten zal hebben, zowel voor leerlingen als voor examenmakers.
Uiteraard heeft de resonansgroep van het PROFI-project waarin enkele bestuursleden onze vereniging vertegenwoordigen, enige kritiek op de gang van zaken op de proefscholen, maar gezien de reeds gerealiseerde uitbreiding van het experiment naar meerdere scholen in samenwerking met het APS, en de geplande herziening van een aantal leerlingteksten, wordt het vertrouwen in een succesvol experiment groter. Vanzelfsprekend zullen wij als bestuur de vervolgexperimenten kritisch blijven volgen. Een mogelijkheid om te komen tot revisie moet niet alleen gesignaleerd, maar ook tijdig aangegrepen worden, zeker als er een overladenheid dreigt op te treden.

De, in theorie, fraaie plannen voor het vbo/mavo, neergelegd in het rapport Van Veen, hebben een grotere kans van slagen gekregen doordat in 1998 niet in de derde maar pas in de eerste klas begonnen hoeft te worden met de volledig nieuwe indeling van de leerstof. De SLO heeft nu meer gelegenheid om adviezen in te winnen en eventueel te experimenteren. De waarschuwingen van de NVvW voor de te geringe ontwikkeltijd, voorjaar 1996 via een brief aan de Staatssecretaris gegeven, hebben resultaat gehad. Tijdens het ontwikkeltraject van deze nieuwe examenprogramma's vbo/mavo heeft het bestuur deelgenomen aan twee brede raadplegingsronden. De zorg voor de zwakke leerlingen is even belangrijk als die voor de meer getalenteerden. Wij zullen ook in het vervolgtraject de ontwikkelingen nauwkeurig volgen en waar nodig proberen bij te sturen.
Voor ons blijft het onbevredigend dat voor de richtingen economie en zorg en welzijn, wiskunde niet verplicht is.

Onze werkgroep "Vrouwen en Wiskunde" heeft weer veel productief en aantrekkelijk werk verricht bij haar pogingen het wiskundeonderwijs voor meisjes aantrekkelijker te maken. De samenwerking binnen "Vrouwen en Exacte Vakken" was zeer positief te noemen. Er is een geslaagd onderwijssymposium over "Vrouwen kozen Exact" georganiseerd en er is weer een nieuwe poster en een boekje over vrouwen in de geschiedenis van de exacte vakken gefabriceerd.
Bovendien is er inmiddels aardig wat materiaal verschenen op het gebied van beroepenoriëntatie in exacte vakken. Alternatieve werkvormen, zoals een beroepsbeoefenaar in de klas, een kwartetspel en een videoband worden daarbij niet geschuwd. De videofilm met bijbehorend lesmateriaal over vrouwen met wis-

kundig getinte beroepen is bijzonder bruikbaar als voorlichtingsmateriaal in de wiskundeles.
De studiedag op 5 oktober, over de consequenties van de vele onderwijsvernieuwingen in de wiskunde voor de positie van meisjes in dat vak, was goed bezocht en succesvol te noemen.
Onze werkgroep voor het MTO heeft zeer veel werk verzet om voorlichting te geven aan docenten in de technische sectoren, over op handen zijnde vernieuwingen. Het bestuur is verheugd dat de aanbevelingen die wij het ministerie gedaan hebben ten aanzien van het project voor Techniek, Wiskunde, Informatietechnologie en Natuurkunde (TWIN) voor het maken van nieuwe leerstof in het MTO overgenomen zijn. Wij hopen niet alleen dat de experimenten goed zullen verlopen, maar ook dat de doorstroming van leerlingen naar het MTO danig zal verbeteren. Platform voor MTO: veel succes en probeer binnen de NVvW een grote groep actieve MTO-docenten te krijgen die met elkaar en met de vbo/mavo docenten goede contacten gaan onderhouden. Uiteraard hopen wij dat er veel meer leden zullen komen uit deze sector.
Zeer binnenkort hoopt het bestuur in aansluiting op de activiteiten voor het MBO, ook een werkgroep voor HBO-docenten op te richten.



Per 1 april is Martinus van Hoorn als hoofdredacteur van Euclides opgevolgd door Kees Hoogland. In kleine kring hebben wij afscheid genomen van Martinus van Hoorn, die gedurende vele jaren zeer veel energie gestopt heeft in de verbetering van inhoud en layout van ons vakblad. Talrijk zijn de ideeën van Martinus die door de redactie zijn overgenomen en die bleken te voldoen. Voor zijn inzet en creativiteit willen wij hem nogmaals hartelijk danken. Trouwens de hele redactie mag wel een pluim hebben voor het nieuwe elan van ons blad.
Wij wensen Kees Hoogland veel succes, en spreken de hoop uit dat hij in goede samenwerking met redactie en bestuur, Euclides tot een nog beter gelezen en interessanter blad kan maken.
Wij zijn verheugd te kunnen melden dat de contacten met de nieuwe drukker van Euclides, Ten Brink uit Meppel, zoals het zich nu laat aanzien goed te noemen zijn. Wij hopen dat de samenwerking met Ten Brink even voorspoedig zal zijn als die gedurende vele jaren met Wolters-Noordhoff geweest is. Voor de langdurige goede samenwerking met WN dank ik hen nog hartelijk. Het klinkt natuurlijk vreemd omdat we wel overgestapt zijn naar een andere drukker, maar wij hebben slechts om de duidelijk lagere prijs die Ten Brink voor hetzelfde werk vraagt, moeten kiezen voor de overstap.

De Didactiekcommissie heeft in haar lange bestaan veel nuttige activiteiten ontplooid. Wij blijven het van het grootste belang vinden dat die commissie artikelen voor Euclides en brochures maakt. Het bestuur hoopt dat er nieuwe, jongere leden bereid gevonden zullen worden om de plaatsen over te nemen van een aantal commissieleden die nu, na een lange staat van dienst, afgetreden zijn. Meldt u zich alstublieft aan bij het hestuur, want de didactiek is van het grootste belang, zeker in tijden waar zoveel veranderingen plaats vinden.

De Stichting Mathematisch Centrum (SMC) heeft de afgelopen zomer voor de vijftigste keer de vakantiecursus voor leraren wiskunde georganiseerd. Al meer dan dertig jaar is Prof. Dr. A.W. Grootendorst bij de organisatie betrokken. Het werk dat hij verzet om te zorgen dat er een interessante, nuttige en goed begrijpelijke cursus tot stand komt is gigantisch. Vele docenten worden door de diverse goede sprekers op die cursussen weer gestimuleerd om zich in ons mooie vak te verdiepen. Vaak wordt het gereedschap aangereikt om ook in de vwo-klassen leuke extra stof te behandelen teneinde, meer nog dan met onze examenstof, goede leerlingen te kunnen bewegen wiskunde te gaan studeren. In de afgelopen zomer ging de cursus over chaostheorie en ik vermoed

namens alle deelnemers te spreken als ik zeg dat het wel een zeer bijzonder geslaagde cursus was. De SMC heeft in verband met haar eigen vijftig jarig bestaan alle deelnemers een fraai boek ten geschenke gegeven en tijdens de cursus op diverse momenten gezorgd dat de cursisten op bijzondere wijze verzorgd werden. Namens de NVvW bedank ik de SMC voor het geweldig nuttige werk dat ze voor wiskundedocenten doet en spreek de hoop uit dat Professor Grootendorst en het SMC nog vele, vele jaren doorgaan met de organisatie van dergelijke boeiende cursussen.

Hoewel het vele werk dat ons erelid Felix Gaillard voor de vereniging gedaan heeft nooit vergeten zal worden, zijn wij verheugd te kunnen melden dat ons lid Elly van Bemmel, na een inwerkperiode, nu al zeer veel werk van het verenigingsbureau goed onder de knie heeft. Wij hopen dat ze net als Felix een vraagbaak voor alle leden kan worden. Elly, veel succes in de toekomst en alvast bedankt voor je grote inzet.

Niet alleen bij onze vereniging is het moeilijk om leden te vinden die pro deo voor de vereniging veel werk willen verzetten; meer vakinhoudelijke verenigingen zien zich genoodzaakt om een soort van professionalisering in te voeren. Belastingtechnische gevolgen maken het ons moeilijk om hiertoe over te gaan. Het bestuur is bezig zich te beraden over een bruikbare weg die in de toekomst gevolgd kan worden, zodat het vele werk dat op ons af komt op goed niveau en in het belang van alle leden uitgevoerd kan worden.

Met het Platform van Vakinhoudelijke Verenigingen in het Voortgezet Onderwijs wordt gekeken naar samenhangende maatregelen die de kwaliteit van de beroepsuitoefening en de status van het leraarsberoep verhogen. Een opstelling en hantering van bekwaamheidseisen en een beroepsstandaard voor de wiskundeleraar in het voortgezet onderwijs zal vermoedelijk nodig worden. Deze zaken vereisen een nauwkeurige studie en zullen ons nog veel hoofdbrekens kosten alvorens wij tot een voor onze leden werkbaar, aanvaardbaar en gunstig voorstel kunnen komen. Uiteraard zullen de leden te zijner tijd gehoord worden, maar voorlopig zien wij nog veel donkere wolken.

De examens gaven in het afgelopen jaar aanzienlijk betere resultaten te zien dan in 1995. Laten we hopen dat deze verbetering verder zal doorgaan.
Met het hoofdbestuur van de CEVO heeft het bestuur plezierige contacten gehad en wij hopen, samenwerkend, ervoor te kunnen zorgen dat de problemen van 1995 geen herhaling krijgen.
In het bijzonder willen wij de CEVO bedanken voor de subsidie die wij gekregen hebben voor de verzending van Euclides nummer 2. Dit nummer, speciaal gewijd aan de nieuwe examens vbo/mavo, is gestuurd naar alle scholen met een vbo/mavo-afdeling.

Gelukkig is de organisatie van de examenbesprekingen, vroeger gedaan door Felix, nu goed overgenomen door Sjoerd Schaafsma. Onze leden zullen moeten beseffen dat we als vereniging nooit het recht hebben om bestaande examennormen te veranderen. Slechts verfijningen zijn toegestaan. Hieraan blijkt een grote behoefte te bestaan. Jammer is het dat veel wiskundeleraren wel gebruik maken van de door ons georganiseerde bijeenkomsten, maar niet bereid zijn lid te worden. Wij hebben de niet-leden die deelgenomen hebben aan de examenbesprekingen aangeschreven om hen duidelijk te maken dat de organisatie elk jaar weer vele duizenden guldens aan contributiegelden van de leden kost! Neemt u dus graag uw collega's mee naar onze examenbesprekingen, maar probeer hen te overtuigen van de noodzaak om lid te worden.

Aangezien zeer veel leden vrijwillig bijdragen aan het "Wereldwiskunde Fonds" zijn wij blij dat de commissie die bestemmingen voor het geld zoekt, wederom aan het werk kan gaan om een goed wiskundig doel te zoeken in de landen die daar grote behoefte aan hebben. Wij zullen u hierover informeren via Euclides.
In ons eerste project hebben wij een middelbare school in Zambia voor alle leerjaren van wiskundeboeken kunnen voorzien.

Het tijdschrift Pythagoras heeft een nieuwe redactie gekregen. Het eerste nummer is verschenen en ziet er bijzonder goed uit. Wij krijgen de indruk dat de redactie een weg ingeslagen is, die voor veel leerlingen boeiend kan zijn. Wij wensen hen zeer veel succes en hopen dat veel wiskundeleraren in staat zullen zijn nu meer leerlingen zover te krijgen dat ze zich abonneren op dit wiskundetijdschrift voor jongeren.

Op de ICME-conferentie in Sevilla was Nederland goed vertegenwoordigd. Het was een hele eer dat Jan de Lange van het Freudenthal instituut de plenaire slotlezing mocht houden.

Het thema van onze studiedag is "Vernieuwing, nuttig en recreatief". Met opzet hebben wij eens een keer de recreatieve kant van de wiskunde, die er natuurlijk altijd geweest is, een beetje meer nadruk willen geven.
Hoe één en ander nader is uitgewerkt zult u zodadelijk horen van Aad Goddijn die, met Freek Mahieu en enkele anderen, veel werk verzet heeft om alles voor vandaag te organiseren.
Ik wens u allen een nuttige en vooral recreatieve dag toe.

Hans van Lint

Noot

Bovenstaande jaarrede werd op de jaarvergadering op 16 november 1996 van de NVvW door de voorzitter gehouden.

Geridderd



Tijdens de jaarvergadering van de vereniging op 16 november 1996 werd erelid Felix Gaillard, die jarenlang een belangrijk steunpunt in de vereniging is geweest, door de burgemeester van Bilthoven tot Ridder in de Orde van Oranje Nassau ‘geslagen’.
Ook vanaf deze plaats nog eens van harte gelukgewenst, Felix!

DE REDACTIE

Wereldwiskunde Fonds

Nu de contributies voor ‘96/’97 binnen zijn kan ook de penningmeester van het Wereldwiskunde Fonds de balans opmaken. Ruim ƒ 8.000,– hebben de leden van de NVvW bij elkaar gebracht. Momenteel benaderen we docenten in het buitenland met het verzoek een projectvoorstel te doen. In juni hopen we een keuze te kunnen maken. Het project ‘94, wiskundeboeken voor de middelbare school van Mpongwe in Zambia, is nagenoeg afgerond. De hele school is van wiskundeboeken voorzien waardoor er geen lesstof meer gedicteerd hoeft te worden en deze tijd besteed kan worden aan de inhoud van het vak. Het projectverslag kan schriftelijk worden aangevraagd bij:
R.J. Jongeling, Sterappelstraat 38, 4421 LG Kapelle.
Project ‘95, het ontwikkelen van bijscholingsmateriaal voor docenten door onze zusterorganisatie in Zambia de ZAME, staat op het punt van start te gaan. Onze oproep in Euclides voor aanvulling van de werkgroep leverde zoveel reacties op dat we zelfs mensen moesten teleurstellen. We zijn blij te merken dat zoveel leden van de NVvW het ondersteunen van het wiskundeonderwijs in de Derde Wereld een warm hart toedragen.



RUUD JONGELING

Rectificatie

In de aankondiging van de plenaire voordracht op de regionale bijeenkomsten op 11, 13 en 18 maart aanstaande (zie pagina 167 van het vorige nummer) had moeten staan dat de sprekers zich alléén zullen richten op nieuwe technologie bij de examens havo/vwo.

Aangezien de technologische ontwikkelingen het wiskundeonderwijs op elk niveau zullen beïnvloeden, meent het NVvW-bestuur dat deze voordracht voor **alle wiskundedocenten** van belang zal zijn.

Geheugensteuntje

Heeft u zich al opgegeven voor de regionale bijeenkomst in maart in Zwolle, Leiden of Eindhoven?

Informatie over het programma en over de wijze van aanmelden vindt u in nummer 4 van deze jaargang op pagina 167.

Het telefoonnummer van organisator Freek Mahieu is 0411-673468.

Nederlandse Wiskunde Olympiade

F. Bosman

De eerste ronde 1996

De eerste ronde van de Nederlandse Wiskunde Olympiade 1996 werd op vrijdag 22 maart gespeeld.
In totaal waren er 2759 deelnemers, die drie uur de tijd kregen om een antwoord te vinden op 13 opgaven. Daarmee waren in totaal 36 punten te verdienen. De hoogte score die werd behaald was 34 punten.
De cesuur om mee te doen aan de tweede ronde werd gelegd bij 23 punten, waardoor 102 deelnemers werden uitgenodigd voor de tweede ronde.
De school met de hoogste score van de beste vijf deelnemers is het Stedelijk Gymnasium in Arnhem met 123 punten. Deze school haalde de Shell-wisselprijs.

De tweede ronde 1996

Op 13 september 1996 is in Eindhoven de tweede ronde van de Nederlandse Wiskunde Olympiade 1996 gehouden. Van de 102 uitgenodigde leerlingen deden er 99 mee. Deze leerlingen hadden wederom drie uur de tijd om vijf opgaven te maken. Deze opgaven met de oplossingen zijn bij dit artikel afgedrukt. De maximale score per opgave was 10 punten.
De volgende tien leerlingen zijn de prijswinnaars geworden van de Nederlandse Wiskunde Olympiade 1996.

1	Johan Bosman, Renkum	48
2	Fokko van der Bult	41
3	Lian Ien Oei, Oegstgeest	37
4	Sander v. Noort, Capelle adY	35
5	Harm Elzinga, De Waal	32
6	Evert Koopman, Lelystad	32
7	Niels Besseling, Zwaag	31
8	Hermen Jan Hupkes, Rijnsburg	31
9	Chris Groeneveld, Bodegraven	30
10	Tanja Saraber, Weert	30



De eerste ronde 1997

De eerste ronde in 1997 zal dit jaar gehouden worden op vrijdag 11 april 1997.
Naar alle scholen zijn inmiddels aanmeldingsformulieren gestuurd.
Duizenden leerlingen hebben de afgelopen jaren ook meegedaan aan de Kangoeroe-wedstrijden. Op grond daarvan verwachten we dit jaar toch weer een groter aantal deelnemers aan de Wiskunde Olympiade 1997.
Wij roepen docenten dan ook op hun leerlingen te stimuleren mee te doen aan deze uitdagende wedstrijd.

De opgaven tweede ronde 1996

NEDELANDSE
WISKUNDE
OLYMPIADE

Tweede ronde
13 september 1996

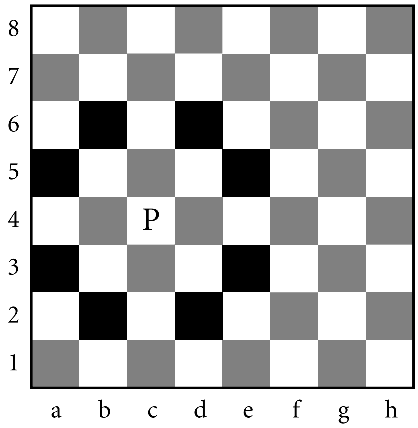
1 Hoeveel verschillende (niet gelijkvormige) driehoeken zijn er waarvan de hoeken een geheel aantal graden hebben?

2 Onderzoek of voor twee positieve gehele getallen m en n de getallen $m^2 + n$ en $n^2 + m$ beide kwadraten kunnen zijn van gehele getallen.

3 Wat is het grootste aantal paarden dat je op een schaakbord kunt zetten zonder dat er ergens een tweetal paarden is dat elkaar kan slaan?

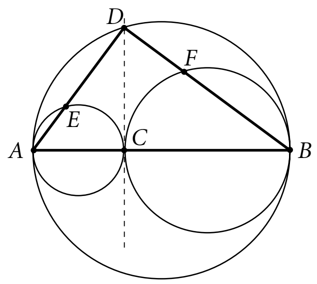
a Beschrijf een opstelling met dat maximale aantal.

b Bewijs dat een groter aantal niet mogelijk is.



(Een schaakbord bestaat uit 8 × 8 velden en een paard springt van een veld naar een ander veld volgens de regel 'twee vakjes verticaal en een vakje horizontaal' of 'een vakje verticaal en twee vakjes horizontaal')

4 Een lijn l snijdt het lijnstuk AB loodrecht in C. Drie cirkels zijn getekend met achtereenvolgens AB, AC en BC als middellijn. De grootste cirkel snijdt l in D. De lijnstukken DA en DB snijden de twee kleinere cirkels nog in E en F.



a Bewijs dat vierhoek $CFDE$ een rechthoek is.

b Bewijs dat de lijn door E en F de cirkels met middellijnen AC en BC raakt in E en F.

5 Voor de positieve gehele getallen x, y en z geldt

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{z}.$$

Bewijs dat als de drie getallen x, y en z geen enkele gemeenschappelijke deler groter dan 1 hebben, $x + y$ het kwadraat is van een geheel getal.

De oplossingen tweede ronde 1996

1 Systematisch tellen van de mogelijkheden met $x \leq y \leq z$ levert:

x y z	x y z	x y z	x y z	x y z	…	x y z	x y z	x y z
1 1 178	2 2 176	3 3 174	4 4 172	5 5 170	…	58 58 64	59 59 62	60 60 60
1 2 177	2 3 175	3 4 173	4 5 171	5 6 169	…	58 59 63	59 60 61	
1 3 176	2 4 174	3 5 172	4 6 170	5 7 168	…	58 60 62		
1 4 175	2 5 173	3 6 171	4 7 169	5 8 167	…	58 61 61		
…		…		…		…		…
1 88 91	2 88 90	3 87 90	4 87 89	5 86 89	…			
1 89 90	2 89 89	3 88 89	4 88 88	5 87 88	…			
89	88	86	85	83	…	4	2	1
177		171					3	

Totaal dus
$3 + 9 + 15 + \ldots + 165 + 171 + 177 = 2700$
want voor twee maal de som geldt:
$3 + 9 + 15 + \ldots + 165 + 171 + 177$
$177 + 171 + 165 + \ldots + 15 + 9 + 3 =$
$180 + 180 + 180 + \ldots + 180 + 180 =$
$30 \cdot 180 = 5400$

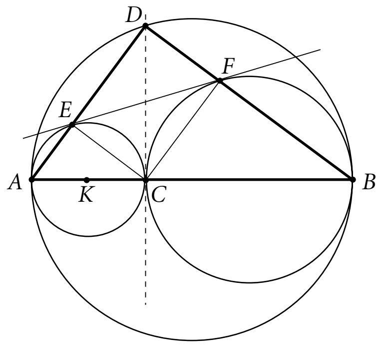
2 De getallen kunnen niet beide het kwadraat van een geheel getal zijn. Vanwege de symmetrie in m en n kunnen we veronderstellen $m \geq n$;
dan geldt dat het eerste kwadraat na m^2 gelijk is aan $(m + 1)^2$; $(m + 1)^2 = m^2 + 2m + 1$ en dat is altijd groter dan $m^2 + n$ omdat $2m + 1 > n$ want $m \geq n$.

3a Een paard gaat altijd van een zwart naar een wit of van een wit naar een zwart vakje. Zet 32 paarden op bijvoorbeeld alle witte vakjes, dan is er geen enkel tweetal dat elkaar kan slaan.

b Je mag hier nu niet uitgaan van de situatie dat er al 32 paarden alleen op de witte vakjes staan. (Bij een 4 bij 4 schaakbord bijv. kun je 8 paarden als volgt neerzetten dat ze elkaar niet slaan: vier paarden in de eerste rij en vier paarden in de vierde rij.)
Veronderstel dat er meer dan 32 paarden op een schaakbord gezet kunnen worden zodat geen enkel paar elkaar kan slaan. Omdat 32 de helft van het aantal velden is moet er dus op meer dan de helft van het aantal velden een paard staan. Dus moet er ergens een stuk bord van 2 bij 4 zijn waarop minstens 5 paarden staan. In een van de vier kolommen moeten dan 2 paarden staan. Die bestrijken weer een kolom van 2 velden. Er blijven dan 4 vakjes over waarop dan 3 paarden moeten worden gezet die elkaar niet mogen slaan (zie figuur) en dat kan niet!

p		–	
p		–	

	p		–
	p		–



4a Omdat AB een middellijn is, geldt $\angle ADB = 90°$, omdat AC een middellijn is, geldt $\angle AEC = 90°$ en omdat BC een middellijn is, geldt $\angle CFB = 90°$. Drie hoeken van vierhoek $CFDE$ zijn al 90°, dus de vierde hoek ook en de vierhoek is een rechthoek.

b Noem het midden van AC K. K is het middelpunt van de cirkel met AC als middellijn. EK is dus even lang als CK. Driehoek ECK is gelijkbenig. Samen met vierhoek $ECFD$ vormt deze driehoek een vijfhoek $DFCKE$ die spiegelsymmetrisch is in de loodlijn vanuit K op DF. Uit de symmetrie volgt direct: $\angle KCD = \angle KEF$. Omdat geldt $\angle KCD = 90°$geldt ook $\angle KEF = 90°$. Dus geldt dat EK loodrecht staat op EF en dan raakt EF aan de cirkel.
Op eenzelfde manier bewijs je dat EF ook raakt aan de cirkel met BC als middellijn.

5 In het bewijs gebruiken we de volgende hulpstelling: Voor een priemgetal p geldt: als p een deler is van $x + y$ dan geldt:
p is een deler van x dan en slechts dan als p ook een deler van y is.
Uit het gegeven volgt direct: $z(x + y) = xy$ …(*).
Voor een priemgetal p dat een deler is van $x + y$ geldt volgens (*) dat p ook een deler is van xy, dus moet volgens de hulpstelling p een deler van x en een deler van y zijn. Dus p^2 is een deler van xy.
Omdat p al een deler van x en y is, kan p geen deler van z zijn, want x, y, z hebben geen gemeenschappelijke deler groter dan 1. Dus volgt uit (*) dat p^2 een deler is van $x + y$. Als p een priemdeler van $x + y$ is dan is p^2 ook een deler van $x + y$.
$x + y$ bevat dus geen priemfactoren tot de macht 1.
Rest nog te bewijzen dat alleen even machten van een priemfactor in $x + y$ kunnen voorkomen.
Stel dat behalve de factor p^2 nog een factor p in $x + y$ voorkomt. Noem nu $x = px'$ en $y = py'$ dan volgt uit

$$(*): z\frac{(x + y)}{p^2} = z\frac{(x' + y')}{p} = x'y'.$$

Volgens veronderstelling geldt nu p is een deler van

$$\frac{(x' + y')}{p}$$, dus p is een deler van $x'y'$.

Omdat p een deler van $(x' + y')$ is, geldt nu ook weer dat p een deler van x' is dan en slechts dan als p ook een deler van y' is, zodat p^2 een deler van $x'y'$ is

dus ook een deler van $$\frac{(x' + y')}{p},$$

ofwel p^4 is een deler van $x + y$.
Zo kunnen we doorgaan voor hogere machten van p.
Conclusie: $x + y$ kan dus alleen even machten van priemgetallen bevatten en is dus een kwadraat.

32ste Nederlandse Mathematisch Congres

Het 32ste Nederlandse Mathematisch Congres wordt op *donderdag 3 en vrijdag 4 april 1997* gehouden op het Dreijencomplex van de Landbouwuniversiteit in Wageningen.

Het programma omvat o.a. de volgende punten:

Openingsvoordracht:
prof.dr. W. Schaafsma
Waarheid, Werkelijkheid en Waarschijnlijkheid

Minisymposia over

- Jan de Wit, wiskundige en staatsman
(coördinator J.A. van Maanen)
Hoofdvoordracht:
Prof.dr. A.W. Grootendorst
De kegelsneden bij Jan de Wit

- De wiskunde in de profielen van het vwo
(coördinator M. Kindt)
Hoofdvoordrachten:
Prof.dr. J. v.d. Craats
Nieuwe wiskunde en nieuwe examens
M. Kindt
Profielwiskunde op de rails: lijnen en dwarsverbanden

- Het onderwijs van de wiskunde in de derde wereld
(coördinator H. v. Wijk)

- Financiële wiskunde (coördinator W.H.A. Schilders)

alsmede
Computerdemonstraties (coördinator A. Otten)

Films en Boekententoonstelling.

Inschrijving:
Inschrijving voor deelname aan het congres bij *Congresbureau LUW*, Costerweg 50,
6701 BH Wageningen.

De inschrijvingskosten bedragen *ƒ* 40,- voor WG-leden en *ƒ* 60,- voor niet- WG-leden. De lunch (facultatief) kost *ƒ* 12,50 per dag. Het totaalbedrag kan worden overgemaakt op bankrekening 61.91.04.848 (giro ABN-AMRO Wageningen 824200) t.n.v. penningmeester Ned. Math. Congres onder vermelding van uw naam.

Voor nadere informatie kunt u contact opnemen met E.M.T. Hendrix, *p/a Vakgroep Wiskunde*, Dreijenlaan 4, 6703 HA Wageningen, tel. 0317-484085.

De SLO ontwikkelde[1] een drietal schoolonderzoekopdrachten voor (i)vbo, waarin wiskunde en beroepen het centrale thema is. In dit artikel wordt ingegaan op de opdracht 'Werken in de Thuiszorg'.

School-onderzoek met beroepen

Gerrit van den Heuvel

Inleiding

In dit schooljaar doet vbo en mavo voor het eerst eindexamen volgens het nieuwe programma. Wat dat betekent voor het examen hebt u inmiddels kunnen zien via de experimentele B-, C- en D-examens in nummer 2 van deze jaargang van Euclides. Het schoolonderzoek moet u zelf invullen. In dit artikel bespreek ik een voorbeeld van een schoolonderzoek waarin de 'Thuiszorg' centraal staat. Het is één van de drie voorbeelden die de SLO heeft ontwikkeld en die uitgeprobeerd zijn op een aantal experimenteerscholen. De andere zijn 'Tweedehands auto's', over de bepaling van de vraagprijs van een tweedehands auto en wat daar aan wiskundigs bij komt kijken, en 'Vakken en Schappen' over winkelinrichting. Deze voorbeelden zijn, samen met een voorbeeld van een schoolonderzoekopdracht per computer, uitgegeven als docentenboek bij de SLO [3].

Voorgeschiedenis

Het sleutelwoord in het nieuwe wiskunde-programma is ongetwijfeld 'realistische wiskunde'. Dat houdt onder andere in dat wiskunde veel sterker aansluit bij de realiteit dan voorheen. Daar kwamen twee zaken bij:

1 GWA, Geïntegreerde Wiskundige Activiteiten, waarin niet één wiskundige inhoud centraal staat, maar waarin wiskunde wordt bedreven vanuit een gegeven context.

2 Vooral op (i)vbo: gericht aandacht besteden aan wiskunde uit mogelijke toekomstige beroepenvelden van de leerling.

Hoewel weinig verschil van mening bestond en bestaat over de zinvolheid van dit laatste punt, blijkt het in de praktijk een weerbarstig terrein. De motieven om aandacht te besteden aan wiskunde uit beroepen(velden) zijn duidelijk:

- Het levert een directe bijdrage aan de opleiding van de leerling, waardoor hij of zij beter voorbereid wordt op zijn/haar toekomstige beroep.
- Het sluit aan bij de trend om meer aandacht te geven aan beroepsgerichte zaken, met name in de bovenbouw (i)vbo.
- Wiskunde in beroepen is vanwege haar directe bruikbaarheid en herkenbaarheid motiverend voor de leerling.

Experimenten brachten mogelijkheden aan het licht om met beroepencontexten te werken in de wiskunde. Behalve voorbeelden vanuit de SLO kunnen we ook de fraaie bundel 'Wiskunde en werk' van de werkgroep Vrouwen en Wiskunde[4] noemen met een aantal inspirerende voorbeelden van wiskunde in beroepen, zij het op een heel divers (wiskundig) niveau.

Daarbij worden twee zaken duidelijk:

1 Wil je serieus werk maken van wiskunde en beroepen, dan zal je veeleer vanuit de beroepencontext moeten denken dan vanuit de wiskunde zelf.

2 Om het materiaal bruikbaar te houden voor grotere groepen leerlingen kun je daarbij niet ingaan op al te specifieke beroepszaken en zal je moeten proberen om meer algemeen bruikbare wiskundige concepten te gebruiken in je lesstof.

De keuze van het thema

Ons uitgangspunt was om een schoolonderzoekopdracht te maken over wiskunde en beroepen die in een beperkt aantal lessen te doen was. Daarbij kwam uitdrukkelijk de vraag naar voren om ook

een context te kiezen waarmee met name meisjes zich duidelijk konden identificeren. Op die manier kwam stukje bij beetje de Thuiszorg in beeld.
Voor een verzorgende is de ‘technische’ kant van het beroep veelal niet het moeilijkst. Een baby verschonen, een vloer dweilen of een bejaarde heer onder de douche zetten zijn dingen die je niet zomaar kunt, maar opleiding en praktijkervaring staan er veelal garant voor dat dit op een professionele manier gebeurt. Een lastig punt, vooral voor de beginner in het vak, is het plannen van activiteiten. Als je niet precies voorgeschreven krijgt welke klussen je in welke volgorde moet doen, dan moet je goed nadenken hoe je alles plant in de tijd die je hebt. Zo werd ‘plannen’ het centrale thema van het lesvoorbeeld.
Deze problematiek was ook voor de leerlingen op de proefscholen een voorstelbaar probleem, waar ze als vanzelf over nadachten. De wiskunde ‘ging ergens over’.

Voor (i)vbo-leerlingen is het belangrijk dat ze de aangeboden opdracht als probleem ervaren. Dat motiveert ze om er over na te denken en daarmee komen ze ook verder als het gaat om het vinden van een oplossing. De wiskunde wordt de moeite waard.

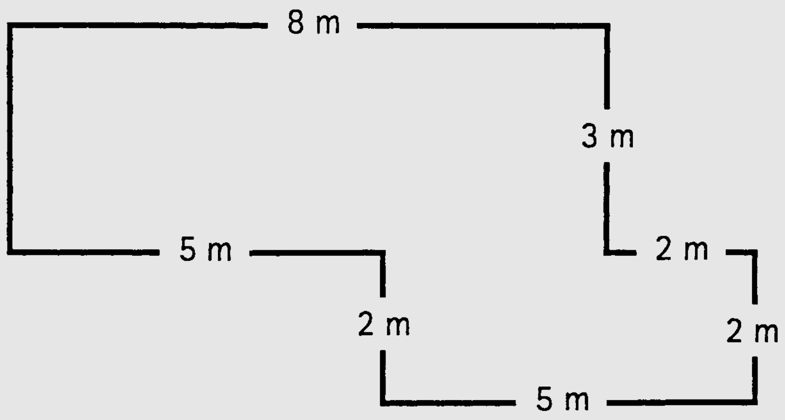
Bij de uitwerking van het lesmateriaal zocht ik ook contact met collega’s uit de beroepsgerichte vakken. Daarbij werd bevestigd wat ik al vermoedde. ‘Plannen’ en het werken met een planbord werd inderdaad als een belangrijk en lastig probleem herkend. In diverse beroepsrichtingen wordt daar aandacht aan besteed.

Voor (i)vbo-leerlingen zoek ik naar eenvoudig voorstelbare contexten waarin een centraal thema is geprogrammeerd dat ook buiten de specifieke context bruikbaar is.

Het lesvoorbeeld zelf

Met ‘Werken in de Thuiszorg’ kiest u voor een schoolonderzoekopdracht die eenvoudig naast de gewone methode in een beperkt aantal lessen kan worden uitgevoerd.
In het eerste deel, dat in de praktijk ongeveer drie lessen beslaat, worden de onderwerpen behandeld die nodig zijn voor de schoolonderzoekopdracht. Het begint met oriënterende vragen over het beroep. Daarmee wordt de verbinding met de professionele werkelijkheid direct duidelijk. De leerlingen herkennen dit ook. Vervolgens komen verschillende aspecten die een rol spelen bij planning aan bod:
- In welke volgorde doe je de gewone dagelijkse dingen? Dat is niet zo moeilijk voor de meesten.
- Hoeveel tijd kosten de verschillende activiteiten? Dat gebeurt met ruwe schattingen op basis van ervaring en met normtijden. Als voorbeeld van dat laatste wordt stofzuigen gebruikt: Hoe lang heb je daarvoor nodig als je als norm 0,50 m^2/min moet halen?

11. a Hoe lang doe je er zo over om deze kamer te stofzuigen?



Oppervlakteberekeningen spelen daarbij een rol. Dit is niet gemakkelijk. Maar voortdurend speelt ook de vraag over de juistheid van de gestelde norm zelf een rol: ‘Is 0,50 m^2/min reëel? Kun je zoiets zomaar vragen; de stofzuiger kan wel eens van inferieure kwaliteit zijn?’

De betrokkenheid van de (i)vbo-leerlingen wordt vergroot door ruimte te bieden voor relevante vragen, waarover ze na kunnen denken. Tegelijk maken die vragen de aangeboden context ‘echter’: ze leven zich in in de rol van verzorgende in de Thuiszorg.

- Welke frequentie hebben de verschillende activiteiten? Sommige klussen gebeuren dagelijks, andere gaan wekelijks of maandelijks. Hoe plan je dat? Dat kan bijvoorbeeld met een clusterkaart, een soort rooster waarmee het werk gecoördineerd wordt.
- Tot slot wordt alles tot één planning samengevoegd in een soort planbord. Leerlingen knippen kortere en langere planstrookjes uit, net naar gelang de tijd die de verschillende activiteiten vragen en verdelen die strookjes over het ‘planbord’ op een huns inziens passende manier.

Er is bewust gekozen om te werken met planstrookjes en een soort planbord. Alle activiteiten worden op schaal uitgeknipt en

op het ‘planbord’ gezet. Daarbij spelen heel concrete wiskundige vaardigheden een rol. Het concrete model helpt daarbij.

Wilma werkt van 1 uur tot 5 uur in een gezin. Je leert een planning voor haar te maken.

18. Eén van de dingen die Wilma kan gaan doen is stofzuigen. We rekenen weer met een tijd van 0,50 minuut per m². Vul de tabel verder in:

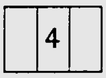
nummer	activiteit	maten	tijd
1	woonkamer zuigen	8 bij 4 m	....
2	slaapkamers zuigen	36 m²	....
3	trappen, gang zuigen	30 m²	....

Andere activiteiten die gedaan kunnen (en soms moeten) worden zijn:

nummer	activiteit	tijd
4	kinderen uit school halen	15.30-16.00 uur
5	boodschappen doen	40 minuten
6	eten voorbereiden	30 minuten
7	thee drinken, spelen	30 minuten
8	schoonmaken wc	15 minuten
9	bedden opmaken	15 minuten
10	was in de machine	10 minuten
11	was ophangen	15 minuten
12	was opvouwen	20 minuten

Bij elke activiteit gaan we een plan-strookje maken.

Hier zie je een voorbeeld: illustratie 12



Dit strookje hoort bij activiteit 4 Kinderen uit school halen. Elk hokje telt voor 10 minuten. Dit duurt 30 minuten dus is het strookje 3 hokjes lang.

Werken met concrete materialen en modellen helpt de (i)vbo-leerling. Daarmee krijgt hij/zij beter grip op problemen met veel variabelen die ‘uit het hoofd’ niet te overzien zijn.

In het tweede deel komt de eigenlijke schoolonderzoekopdracht aan bod. De leerling krijgt een gezinssituatie toegewezen. De opdracht luidt om daarvoor een weekplanning te maken. Daarbij spelen de verschillende onderdelen uit het eerste deel een rol. Alleen moet er nu zelfstandiger en meer vanuit een open vraagstelling worden gewerkt. De opdracht moet uiteindelijk uitgewerkt worden in een verslag. Daarin wordt naast genoemde opdracht nog één extra opdracht toegevoegd. De leerling moet namelijk met zijn/haar planning naar een professionele verzorgende toegaan en die met haar bespreken: Wat vindt de professional van deze planning en hoe zou zij/hij het zelf aanpakken? Daarmee is de cirkel rond. We sluiten af waarmee we begonnen namelijk de beroepspraktijk.

Terugkoppeling naar de echte beroepspraktijk is essentieel bij het werken aan wiskunde en beroepen. Daarmee wordt voor de (i)vbo-leerling duidelijk dat het onderliggende beroepenveld ook inderdaad serieus genomen wordt.

Voor de eigenlijke schoolonderzoekopdracht maakt u zelf een keuze hoe u dat organiseert. U kunt ervoor kiezen om er bijvoorbeeld een drietal lessen voor uit te trekken, maar u kunt de opdracht ook als huiswerk laten uitvoeren. In dat laatste geval wordt de opdracht vergelijkbaar met bijvoorbeeld het maken van een verslag of het uitvoeren van een onderzoeksopdracht, zoals dat bij andere vakken al veel langer wordt gedaan.
Geef u zelf de ruimte om dingen te ontdekken en praat er ook eens over met uw collega’s uit andere vakken. Er is meer know-how over dit soort werk op uw school, dan u in eerste instantie misschien vermoedt.

Een schoolonderzoek voor meisjes, voor jongens of voor iedereen?

De Thuiszorg is een echte meisjescontext. Ze leven zich gemakkelijk in in de situatie en voelen zich erdoor aangesproken. De opdracht is ook uitstekend op verschillende niveaus te gebruiken, zowel voor i-leerlingen als op vbo-b, c en d-niveau. Op de proefscholen werd ‘Werken in de Thuiszorg’ aangeboden naast de alternatieven ‘Tweedehands auto’s en ‘Vakken en schappen’. Dus(?) kozen alleen meisjes voor de Thuiszorg. Of is dat toch niet zo vanzelfsprekend? Voor mij blijft dat een intrigerende vraag. In mijn optiek zouden ook (i)vbo-jongens met deze context kennis moeten kunnen maken. Zouden ze ervoor warm lopen? Jammer genoeg werd die vraag niet beantwoord op de proefscholen. Voelt u zich uitgedaagd om het eens te proberen? Ik ben zeer geïnteresseerd in uw ervaringen!

Noten

1 SLO, Instituut voor Leerplanontwikkeling, in samenwerking met APS en de samenwerkingsgroep W12-16.

2 De auteur is werkzaam bij SLO-Enschede en de CSG Revius-Deventer. Reacties op het artikel kunnen worden gericht aan de auteur
Gerrit van den Heuvel
Sint Jurriënstraat 40
7412 XJ Deventer
0570 - 618 291

3 'Schoolonderzoek Wiskunde', bevat de onderwerpen Thuiszorg, Vakken en Schappen en computerschoolonderzoek. Deze bundel kost *ƒ* 40,00. 'Tweedehands auto's' is apart uitgegeven en kost *ƒ* 15,00.
De leerlingwerkbaden uit deze docentenboeken mogen gekopieerd worden voor eigen gebruik op school.
Bestellen bij:
SLO afdeling verkoop;
telefoon: 053 - 484 0305

4 Te bestellen bij:
Centrum voor Vrouwen en Exacte Vakken (CVEV),
telefoon: 030 - 285 6746

40 jaar geleden

De vormende waarde der wiskunde
P.M. van Hiele en D. van Hiele-Geldof

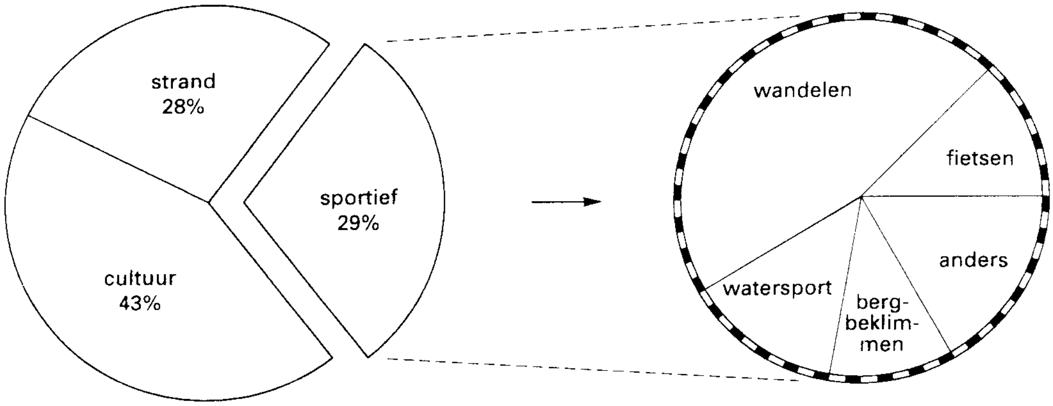
In Euclides XXXII, nr. 2 merkt Van Haselen op, dat de vormende waarde van (goed) algebra-onderwijs veel groter is dan die van (uitgebreid) stereometrie-onderwijs. Op de vraag, of deze uitspraak gegrond is, kom ik in het vervolg van dit artikel terug. In ieder geval is het van het grootste belang te weten onder welke voorwaarden wiskunde vormende waarde zal bezitten. De keuze van de leerstof zal daarbij stellig van betekenis zijn.
Het begrip 'vormende waarde' wordt door Prof. Stellwag ('De Waarde der Klassieke Vorming') als volgt omschreven: 'Wanneer iets geleerd wordt, wordt dan dit specifieke wat men leert, alleen maar geleerd, of daarmee nog iets anders, wat zijn invloed doet gevoelen op andere kennisgebieden, en wat van meer waarde geacht moet worden dan wat feitelijk geleerd wordt, en wat men met het leren van dit heel speciale trachtte te bereiken.'
Of de schoolvakken werkelijk een vormende waarde bezitten, is een vraag, die zeer moeilijk beantwoord kan worden. 'Geistesformung' van Castiello is geheel aan onderzoekingen op dit gebied gewijd. De proeven zijn dikwijls niet zeer overtuigend: men vraagt zich bij de lezing van de verslagen ervan dikwijls af, of zij werkelijk wel zo iets als een vormende waarde toetsen. Heeft men eigenlijk wel een voldoende duidelijk koncept van 'vormende waarde', dat het mogelijk maakt experimenten op te stellen, die de vormende waarde kunnen toetsen?
Het is deze twijfel, die bij de besprekingen over het ontwerp-leerplan van de Wiskunde-werkgroep van de W.V.O. (dat op vele punten overeenkomst vertoont met dat van Wimecos) er toe geleid heeft, dat men de vormende waarde der leervakken niet heeft laten meetellen. Behalve voor de meetkunde gold het praktische nut als criterium voor het al of niet opnemen van de leerstof. Achteraf bekeken was het toch misschien beter geweest de vraag van de vormende waarde maar moedig onder het oog te zien, ook al zou dit waarschijnlijk tot gevolg hebben gehad, dat het programma een jaar later zou zijn gereedgekomen. Immers, zoals Mursell in 'The Psychology of Secondary-School Teaching' opmerkt, wij leraren zijn vast overtuigd van het bestaan van een 'vormende waarde', zonder zulk een vormende waarde zou het vak voor de meeste leerlingen zijn betekenis verliezen.

Uit: Euclides 32 (1956-1957)

Werkblad

Studenten op vakantie

In 1994 studeerden in totaal 11.842 studenten aan de Katholieke Universiteit van Nijmegen. Van hen ging dat jaar 76% op vakantie. Er is onderzocht hoe deze studenten hun vakantie hebben besteed.
De resultaten van dit onderzoek zie je in de cirkeldiagrammen op deze bladzijde.
Uit het rechter cirkeldiagram is af te lezen op welke manier de studenten hun sportieve vakantie hebben ingevuld.



10 Ga na hoeveel studenten in 1994 ging bergbeklimmen. Schrijf op hoe je aan je antwoord komt.

Er waren 2833 eerstejaarsstudenten.

11 Is het *wel* of *niet* mogelijk om met de bovenstaande gegevens na te gaan hoeveel van de eerstejaarsstudenten een watersportvakantie hadden? Licht je antwoord toe.

Uit: **experimenteel examen vbo-mavo-D 1996, tijdvak 2**

Werkblad

Lengte en gewicht

De grafieken op deze bladzijde gaan over de lengte en het gewicht van meisjes bij verschillende leeftijden.
In de onderste grafiek wordt informatie gegeven over het verband tussen de leeftijd en de gemiddelde lengte. Deze grafiek loopt van de 1e tot de 21e verjaardag.
In de bovenste grafiek staat informatie over het verband tussen de lengte en het gemiddelde gewicht.

Lianne is vandaag 4 jaar geworden. Ze is 0,98 m lang.

12 Is Lianne lang, kort of ongeveer gemiddeld van lengte in vergelijking met haar leeftijdgenootjes? Licht je antwoord toe.

Het gewicht van Lianne past bij haar lengte.

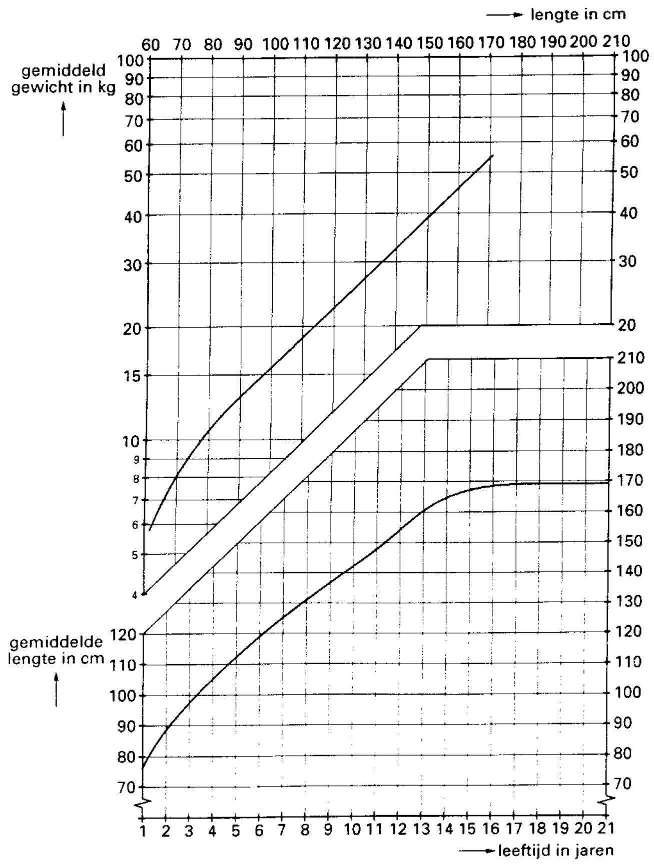
13 Hoeveel kg weegt zij ongeveer volgens de grafiek?

Sophie is nu 11 jaar. Zij is de vorige vier jaar 7 cm per jaar gegroeid.

14 Is die lengtetoename in overeenstemming met de grafiek? Licht je antwoord toe.

Bij Sophie op school zijn veel meisjes van 12 jaar.

15 Hoeveel zullen deze meisjes volgens de grafieken wegen? Leg uit hoe je aan je antwoord komt.



Uit: **experimenteel examen vbo-mavo-D 1996, tijdvak 2**

Opgave 676

Oplossingen, nieuwe opgaven en correspondentie over deze rubriek aan

Jan de Geus
Valkenboslaan 262-A
2563 EB Den Haag

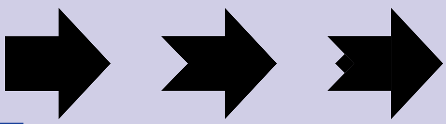


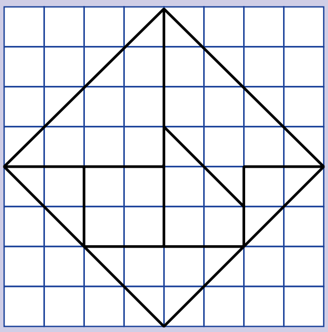
Kent u de 'Richter's Anker Steenbouwdozen' nog? Rond 1875 werden de eerste dozen geproduceerd. Vanaf 1880 werd het idee verder ontwikkeld door Friedrich A. Richter uit Rudolstadt in Thüringen. Er zijn zo'n 34 verschillende dozen met ongeveer 1200 verschillende stenen op de markt gebracht.
Daarnaast zijn er 17 plus 19 verschillende tangramachtige puzzeltjes verschenen. De eerste, uit mei 1891, genaamd Kopfzerbrecher of Steenraadselspel blijkt het gewone Chinese tangram te zijn. Helaas ging in 1963 de fabriek in Rudolstadt dicht.

Maar gelukkig... in 1979 werd de *Club van Ankervrienden* opgericht. En sinds 1994 worden de stenen weer geproduceerd. Op dit moment zijn beschikbaar de bouwdozen 4, 4A, 6, 6A, 8A, 10A en het Kopfzerbrecher puzzeltje inclusief een inlegvel met opgaven en oplossingen. Tot en met 20 april 1997 vindt er een tentoonstelling over Anker Richter plaats in het speelgoedmuseum in Mechelen.

Voor informatie kunt u de secretaris Leo Coffeng, Almen bellen: 0575 - 431542.
Ook kunt u het boekje 'Richter's Anchor Stone Puzzles' bestellen bij Ad van Selms, Den Haag (070 - 3236318).

Als opgave een bijzonder ontwerp van een tangramachtige puzzel. Als u elk van de pijlen met de 7 stukjes kunt leggen, dan verdient u 5 punten voor de ladderpuzzelwedstrijd. Inzendingen graag binnen een maand.





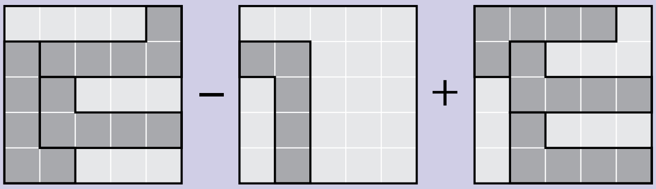
Recreatie

Recreatie

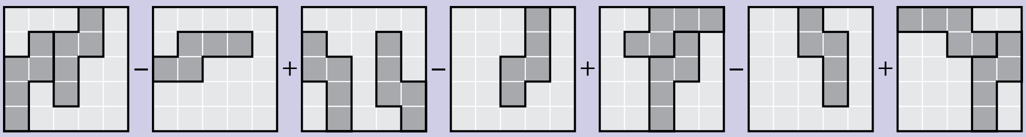
Oplossing 673

De opgave was de FLIP-FLOP PUZZEL van de Italiaan Dario Uri. In een 5 × 5 vierkant staan 25 lampen uitgeschakeld. Een zet bestaat uit het aan- of uitzetten van 5 aaneengesloten lampen. Aan het gegeven voorbeeld kon men zien dat de 5 lampen tegelijk aan of alle 5 tegelijk uit werden gezet. Bij een aantal inzenders leverde dit een misverstand op. De bedoeling is om alle 25 lampen brandende te krijgen.

Bij de eerste opgave werden de 5 lampen aan/uit gezet in de vorm van de L-pentomino. De meeste inzenders hadden 9 of 11 zetten nodig. Slechts een paar vonden een oplossing in 7 zetten (meerdere oplossingen mogelijk).



Als de lampen aan/uit gezet worden in de vorm van de N-pentomino, dan is het minimum aantal zetten 11.



Slechts TWEE inzenders vonden beide minima:
Leo H. van den Raadt (61 punten), Heemstede en
Pieter Torbijn (58 punten), Den Haag.

De puzzel is opgave 429 uit het Argentijnse puzzelblad “Puzzle Fun”. Hierin publiceerde de Amerikaan Michael Reid de volgende minima voor de 12 pentomino’s:

F	I	L	P	N	T	U	V	W	X	Y	Z
13	5	7	7	11	-	9	-	15	-	9	11

Zoals u ziet zijn alleen de T-, V- en X-pentomino onoplosbaar.

Dit probleem is gemakkelijk uit te breiden: probeer 6 × 6 lampen brandende te krijgen als men 6 aaneengesloten lampen tegelijk aan/uit zet in de vorm van één van de 35 hexomino’s!

Met 63 punten is winnaar van een boekenbon van *ƒ* 25,–:

Ad Boons
Luchthavenlaan 22
5042 TD Tilburg

KALENDER

Euclides verschijnt dit schooljaar nog op 15 maart, 30 april en 15 juni.

In deze kalender kunnen alle voor wiskundedocenten toegankelijke en interessante bijeenkomsten worden opgenomen. Data melden bij de hoofdredacteur uiterlijk twee maanden voor de verschijningsdatum. Dit kan ook via e-mail:

cph@xs4all.nl

School TV: Wat en waar is wiskunde?
ma. 17 febr. 1997:
11.00, Ned2
ma. 10 maart 1997:
11.00, Ned2
ma. 17 maart 1997:
11.00, Ned2
ma. 24 maart 1997:
11.00, Ned2
TELEAC/NOT:
035 - 6723611
Zie aankondiging blz. 174 (72-4)

Lezingenserie Hogeschool van Utrecht
ma. 3 maart 1997: 20.00 u
HvU: 030 - 2547230
Prof.dr. Ferdinand Verhulst: Denken en rekenen over atmosferen en oceanen.

Lezing + discussie
do. 6 maart 1997: 19.30 u
VU: 020 - 4445670
Margaret Wertheim: Pythagoras had een broek aan: het mystieke, het mathematische, en de uitsluiting van meiden.
(Zie aankondiging blz.197)

Regionale bijeenkomsten NVvW
di. 11 maart 1997 Zwolle
do. 13 maart 1997 Leiden
di. 18 maart 1997 Eindhoven
NVvW: 0411 - 673468
Zie aankondiging blz. 167 (72-4)

Gebruikersdag Netwerk
vr. 14 maart 1997
Nieuwegein
WN: 050-5226311

Beurzen: School en Computer
wo. 19 maart 1997:
Arnhem
wo. 26 maart 1997:
Eindhoven
wo. 2 april 1997:
Groningen
wo. 16 april 1997:
Rotterdam
za. 26 april 1997:
Amsterdam
Educatieve software
ESS: 050 - 5277504
www.dds.nl/~ess

Kangoeroe-wedstrijd
vr. 21 maart 1997
TUE: 040 - 2472738

Eerste ronde Wiskunde Olympiade
vr. 11 april 1997
Cito: 026 - 3521294
Zie aankondiging blz. 208

APS-conferentie Grafische rekenmachine
wo. 16 april 1997
APS: 030 - 2856722
Zie advertentie 72-2

APS-conferentie Schoolonderzoek vbo/mavo
wo. 23 april 1997
APS: 030 - 2856722
Zie advertentie 72-2

Lezingenserie Hogeschool van Utrecht
wo. 18 juni 1997: 20.00 u
HvU: 030 - 2547230
dr. Marjolijn Witte: Het geslacht van de wiskundeknobbel.

Vierkant Wiskundekampen
4 t/m 8 augustus 1997:
groep 7/8 basisschool.
4 t/m 8 augustus 1997:
12-14 jaar (herhaling 1996).
11 t/m 15 augustus 1997:
13-16 jaar (nieuw progr.).
VU: 020 - 4447776
Aankondiging volgt later.

Internet-sites voor wiskundedocenten:

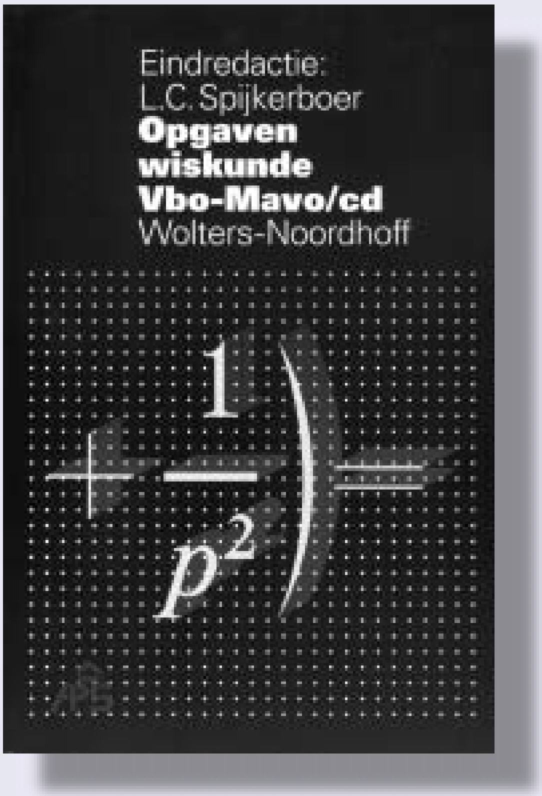
Scholen met homepages:
Candea, Zevenaar:
www.bart.nl/~andreas
GSG Helinium, Hellevoetsluis:
www.publishnet.nl/~helinium
J. van Oldebarnevelt Gymnasium, Amersfoort:
utopia.knoware.nl/users/rcvdveen/jvo
St. Ludger College, Doetinchem:
home.pi.net/~ludgrcol

Met dank aan Gerard Koolstra.
Andere suggesties zijn welkom.
Zie ook kalender 72-3 en 72-4.

Voor het nieuwe examen

Opgaven wiskunde vbo-mavo/cd

Dit schooljaar worden de eerste landelijke examens vbo-mavo volgens het nieuwe leerplan afgenomen. Wilt u uw leerlingen grondig voorbereiden op het nieuwe cd-examen of op het schoolonderzoek, dan kunt u nu beschikken over *Opgaven wiskunde vbo-mavo/cd*.



Werkboek

Bij de nieuwe examens wordt gewerkt met werkvellen; ook daarmee zullen de leerlingen moeten leren omgaan. Daarom zal naast de opgavenbundel een *Werkboek* verschijnen.

De *Opgaven wiskunde vbo-mavo/cd* en *Werkboek* zijn ontwikkeld in samenwerking met het Algemeen Pedagogisch Studiecentrum. Zij zijn bruikbaar naast elke methode.

Ook verkrijgbaar via de boekhandel

Bestellen

Opgaven wiskunde vbo-mavo/cd
ISBN 90 01 09018 4 112 p ƒ 31,90

Werkboek
ISBN 90 01 80593 0 25 p ƒ 9,95

Wolters-Noordhoff
Postbus 58
9700 MB Groningen
Telefoon (050) 522 63 11

Wolters Noordhoff

420/7004-97